ESPACES DE BANACH-COLMEZ ET FAISCEAUX COHÉRENTS SUR LA COURBE DE FARGUES-FONTAINE

par

Arthur-César Le Bras

Résumé. — Nous donnons une nouvelle définition, plus simple mais équivalente, de la catégorie abélienne des espaces de Banach-Colmez (introduite par Colmez dans [**12**]), et nous expliquons la relation précise de cette catégorie avec celle des faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine. On passe d'une catégorie à l'autre en modifiant la t-structure sur la catégorie dérivée. Chemin faisant, nous obtenons une description de la cohomologie pro-étale du disque ouvert et de l'espace affine d'intérêt indépendant.

Abstract. — We give a new definition, simpler but equivalent, of the abelian category of Banach-Colmez spaces introduced by Colmez in [**12**], and we explain the precise relationship with the category of coherent sheaves on the Fargues-Fontaine curve. One goes from one category to the other by changing the t-structure on the derived category. Along the way, we obtain a description of the pro-étale cohomology of the open disk and the affine space, of independent interest.

Table des matières

1. Introduction

Les travaux récents de Fargues ([**21**], [**22**]) et Scholze ([**54**]) sur la géométrisation de la correspondance de Langlands locale mènent naturellement à la rencontre des espaces de Banach-Colmez et à l'étude de certaines questions les concernant. Ces objets avaient été introduits par Colmez, suite à certaines constructions de Fontaine, sous le nom d'*Espaces Vectoriels de dimension finie* (noter les lettres capitales) il y a quinze ans ([**12**]), avec pour objectif d'obtenir une nouvelle preuve de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » en théorie de Hodge p-adique. Rappelons brièvement de quoi il s'agissait.

Soit C le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Colmez définit les espaces de Banach-Colmez comme foncteurs sur la catégorie des C-algèbres *sympathiques* (1) à valeurs dans les $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach. Deux exemples simples de tels foncteurs sont les suivants : d'une part, si V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, le foncteur qui à une algèbre sympathique Λ associe V, noté encore V et que l'on appellera un $\mathbf{Q}_p$*-Espace Vectoriel de dimension finie* ; d'autre part, si W est un C-espace vectoriel de dimension finie, le foncteur qui à une algèbre sympathique Λ associe $\Lambda \otimes_C W$, noté encore W et que l'on appellera un C*-Espace Vectoriel de dimension finie*. Un espace de Banach-Colmez est alors un foncteur ne différant d'un C-Espace Vectoriel de dimension finie que par des $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie : par définition, tout espace de Banach-Colmez admet une présentation comme quotient par un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie V' d'une extension d'un C-Espace Vectoriel de dimension finie W par un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie V. Cela permet d'attacher à une telle présentation d'un espace de Banach-Colmez deux entiers : sa *dimension* $\dim_C W$ et sa *hauteur* $\dim_{\mathbf{Q}_p} V - \dim_{\mathbf{Q}_p} V'$. Cette définition peut sembler un peu étrange, mais Colmez montre que la catégorie des espaces de Banach-Colmez est une catégorie abélienne, que le foncteur d'évaluation sur C est exact et conservatif et que les fonctions dimension et hauteur ne dépendent pas de la présentation et définissent deux fonctions additives sur cette catégorie. De façon remarquable et suprenante, car leur définition n'en fait pas mention, l'étude des espaces de Banach-Colmez fait naturellement apparaître certains anneaux de Fontaine utilisés en théorie de Hodge p-adique.

Les propriétés de la catégorie des espaces de Banach-Colmez ont ensuite été explorées par Fontaine et Plût ([**27**], [**47**]). Elles font fortement penser aux propriétés bien connues de la catégorie des faisceaux cohérents sur une courbe. Ceci a amené Fargues et Fontaine, en conjonction avec d'autres indices, à deviner l'existence d'une courbe (2), qui porte aujourd'hui leur nom, dont l'étude devrait refléter les résultats fondamentaux de la théorie de Hodge p-adique. Le développement de la théorie a pris quelques années et l'on dispose maintenant de plusieurs points de vue sur la courbe de Fargues-Fontaine : le point de vue « algébrique », qui était la perspective initiale de Fargues et Fontaine ; le point de vue « analytique », qui est souvent le plus pratique ; et enfin le point de vue de la théorie des diamants de Scholze, qui est le plus abstrait mais a l'intérêt de faire comprendre pourquoi la courbe de Fargues-Fontaine est un objet naturel et fondamental pour la théorie p-adique. La définition la plus rapide de la courbe de Fargues-Fontaine X (pour le corps $\mathbf{Q}_p$) est sa définition adique. Notons $C^\flat$ le basculé du corps perfectoïde C et soit $p^\flat \in C^\flat$ tel que $(p^\flat)^\sharp = p$. Soit

$$Y = \mathrm{Spa}(W(\mathcal{O}_{C^\flat}), W(\mathcal{O}_{C^\flat})) \backslash V(p[p^\flat]).$$

L'espace adique Y est muni d'un opérateur φ agissant proprement discontinûment ; on définit

$$X = Y/\varphi^{\mathbf{Z}}.$$

Les sections globales des faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine sont les C-points d'espaces de Banach-Colmez. Il était donc naturel à ce stade de se demander quelle

1. Les algèbres sympathiques sont un certain type d'algèbres perfectoïdes. Pour la définition précise, voir la définition 6.1.

2. A ce sujet, on pourra consulter avec profit la préface de [**24**].

relation précise entretiennent la catégorie des faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine et celle des espaces de Banach-Colmez. La solution n'est pas immédiate, car on se convainc facilement que ces deux catégories abéliennes ne sont pas équivalentes. L'objectif de cet article est de répondre à cette question et d'explorer quelques problèmes liés.

1.1. Résultats principaux et plan de l'article. — Nous commençons par redéfinir la catégorie des espaces de Banach-Colmez dans la section 2. La définition que nous en donnons est plus économique et plus naturelle que celle de Colmez, mais moins explicite. Notons Perf_C la catégorie des espaces perfectoïdes sur C. Nous munissons Perf_C de la topologie pro-étale [3]. Deux exemples simples de faisceaux sur ce site à valeurs dans la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sont le faisceau $\mathbf{G}_a$, qui à $S \in \mathrm{Perf}_C$ associe $\mathcal{O}_S(S)$, et le faisceau constant $\underline{\mathbf{Q}_p}$ associé à $\mathbf{Q}_p$.

Définition 1.1. — La catégorie $\mathcal{BC}$ des *espaces de Banach-Colmez* est la plus petite sous-catégorie abélienne stable par extensions contenant les faisceaux $\underline{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{G}_a$, de la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$.

Cette définition donne en fait naissance à une catégorie équivalente à la catégorie originale de Colmez [4]. Des exemples naturels d'espaces de Banach-Colmez, hors des exemples évidents, sont fournis par la théorie des groupes p-divisibles. Cela explique [5] l'apparition d'anneaux de Fontaine dans l'étude de $\mathcal{BC}$. Nous décrivons brièvement comment à la fin de la section 2.

Afin de relier la catégorie $\mathcal{BC}$ à la courbe de Fargues-Fontaine, il nous faut considérer une t-structure différente de la t-structure standard sur la catégorie dérivée bornée $D(X) = D^b(\mathrm{Coh}_X)$ de la catégorie abélienne Coh_X des faisceaux cohérents sur X. La catégorie Coh_X est très bien comprise, grâce à **[24]** : on peut définir des fonctions rang et degré, et la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur X ; on dispose d'un théorème de classification des fibrés sur X, qui rappelle le théorème de Grothendieck pour les fibrés sur $\mathbf{P}^1$. Ces résultats sont rappelés dans la section 5.

C'est précisément l'existence d'un formalisme de Harder-Narasimhan sur X qui va nous permettre de fabriquer une nouvelle catégorie abélienne reliée à $\mathcal{BC}$. Considérons la sous-catégorie pleine suivante de $D(X)$:

$$\mathrm{Coh}_X^- = \{\mathcal{F} \in D(X), H^i(\mathcal{F}) = 0 \text{ pour } i \neq -1, 0, H^{-1}(\mathcal{F}) < 0, H^0(\mathcal{F}) \geq 0\},$$

la notation $\mathcal{G} < 0$ (resp. ≥ 0), pour $\mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X$, signifiant que tous les quotients successifs de la filtration de Harder-Narsimhan de $\mathcal{G}$ sont à pentes strictement négatives (resp. positives). La théorie générale des *paires de torsion* et du *tilting* montre que Coh_X^- est un coeur abélien de $D(X)$.

Notre résultat principal, démontré dans la section 7, est alors le suivant. Bien que la courbe X ne vive pas au-dessus de $\mathrm{Spa}(C)$, on peut définir un morphisme τ du site des espaces perfectoïdes sur X, muni de la topologie pro-étale, vers $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$, qui induit un morphisme τ_* au niveau des topos correspondants. Dans l'énoncé qui suit, on utilise implicitement l'équivalence donnée par le théorème de pureté de Scholze entre $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ et $\mathrm{Perf}_{C^\flat,\text{proét}}$.

Théorème 1.2. — *Le foncteur cohomologie $R^0\tau_*$ induit une équivalence de catégories abéliennes entre Coh_X^- et $\mathcal{BC}$.*

3. On pourrait aussi bien utiliser la v-topologie de Scholze.
4. Que les espaces de Banach-Colmez puissent être définis comme faisceaux pro-étales avait d'ailleurs été pressenti par Colmez ([**12**, p. 5]).
5. Selon le point de vue...

Remarque 1.3. — Fontaine [**29**] a obtenu indépendamment un analogue « Galois-équivariant » du théorème 1.2, mais avec pour définition de l'analogue galoisien de $\mathcal{BC}$ celle de [**27**], qui est plus proche de la définition originale de Colmez que de la définition 1.1.

L'exactitude du foncteur $R^0\tau_*$ en restriction à Coh_X^- découle des propriétés de la cohomologie des faisceaux cohérents sur la version relative de la courbe de Fargues-Fontaine, qui permettent de donner une autre définition de Coh_X^- : voir la section 6. Un certain nombre de corollaires du théorème sont rassemblés dans la section 7 : en particulier, le fait que la catégorie $\mathcal{BC}$ ne dépend que de $C^\flat$, le fait que les espaces de Banach-Colmez sont des diamants et une caractérisation cohomologique des algèbres sympathiques.

Il est facile de voir que l'image par $R^0\tau_*$ de Coh_X^- tombe dans $\mathcal{BC}$. Le reste de la preuve est plus difficile. Le point clé est de réussir à décrire les groupes d'extensions entre les faisceaux $\underline{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{G}_a$ dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$, en petits degrés et de les comparer aux groupes d'extensions analogues dans Coh_X^-, que l'on sait calculer plus facilement. Ces calculs sont effectués dans la section 4 de ce texte.

Remarque 1.4. — Les calculs de certains groupes d'extensions dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ entre les faisceaux $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{G}_a$, en petit degré sont réminiscents de ceux de Breen [**10**] en caractéristique p, même s'ils sont considérablement plus simples (la seule chose dont nous ayons besoin est la résolution partielle explicite utilisée par Berthelot-Breen-Messing dans [**5**]) et beaucoup moins forts. Dans le cas des extensions de $\mathbf{G}_a$ par lui-même, nous montrons que

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = C \ ; \ \mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = C.$$

Il ne fait aucun doute que l'on devrait avoir $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$ en tout degré > 1. Dans [**10**], Breen prouve que

$$\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$$

pour tout $i > 0$, où cette fois-ci le groupe considéré est un groupe d'extensions dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels sur le site des schémas *parfaits* sur une base parfaite de caractéristique p, muni de la topologie étale (ou fppf) (6).

L'usage de la résolution partielle explicite de [**5**] ramène le calcul des groupes d'extensions à des calculs de cohomologie pro-étale, que nous faisons donc au préalable dans la section 3. La connaissance de ces groupes en petit degré est suffisante, mais nous avons choisi de mener le calcul en tout degré. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant, d'intérêt indépendant de l'étude de la catégorie $\mathcal{BC}$.

Théorème 1.5. — *Soit $n \geq 1$ et $i \geq 0$. Notons*

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^n) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbf{A}_C^n) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(\mathbf{A}_C^n)$$

le complexe des sections globales du complexe de de Rham de $\mathbf{A}_C^n$. Alors, d'une part, pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{G}_a) = \Omega^i(\mathbf{A}_C^n).$$

D'autre part, $H^0(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ et pour tout $i > 0$, on a un isomorphisme :

$$H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Q}_p) = \mathrm{Ker}(d_i) = \mathrm{Im}(d_{i-1}) \subset \Omega^i(\mathbf{A}_C^n).$$

Tous les groupes de cohomologie considérés sont des groupes de cohomologie pro-étale.

Remarque 1.6. — Ce résultat a été également obtenu par Colmez et Nizioł [**16**] ; voir la remarque 3.33.

6. L'asymétrie apparente (pour $i = 1$) entre les deux situations n'en est pas vraiment une : si dans la définition des espaces de Banach-Colmez, on remplace le corps $\mathbf{Q}_p$ par un corps local E de caractéristique p, $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ s'annule aussi dans la catégorie des faisceaux de E-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$.

Dans le cas du faisceau $\mathbf{Q}_p$, le lecteur notera le contraste avec la cohomologie étale, qui est nulle en degré strictement positif. La première partie du théorème se déduit facilement des résultats de [**50**] ; la seconde est nettement plus délicate. Pour $i = 0, 1$, qui sont les seuls degrés nécessaires pour l'application à la démonstration de l'équivalence entre Coh_X^- et $\mathcal{BC}$, on peut tout faire à l'aide de la suite exacte de Kummer. En degré quelconque, nous y parvenons à l'aide de la version « faisceautique » d'une variante de la suite exacte bien connue en théorie de Hodge p-adique :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0.$$

Les mêmes méthodes s'appliquent au disque unité ouvert en dimension quelconque. Elles devraient permettre plus généralement d'étudier la cohomologie pro-étale des espaces rigides Stein lisses définis sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ [7].

Terminons cette introduction en soulignant l'analogie frappante entre la catégorie $\mathcal{BC}$ des espaces de Banach-Colmez et celle des groupes quasi-algébriques unipotents (ou proalgébriques unipotents) de Serre ([**55**]). Non seulement les définitions de ces deux catégories ont un air de famille, mais ces objets font leur apparition dans des contextes similaires. Ils interviennent tous deux en théorie du corps de classes : voir respectivement [**55**] et [**22**]. Les groupes de cohomologie plate (fppf) de μ_p sur une variété propre et lisse sur un corps parfait de caractéristique p sont les points de groupes algébriques unipotents ([**45**]), de même que la cohomologie syntomique géométrique donne naissance à des espaces de Banach-Colmez ([**46**]). Il conviendrait d'expliquer et d'explorer cette analogie.

Notations. — On note $C^\flat$ le basculé de C. Il s'agit d'un corps valué complet algébriquement clos de caractéristique p, dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{C^\flat}$ est

$$\mathcal{O}_{C^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/p,$$

qui s'identifie aussi (comme monoïde multiplicatif) à $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C$.

On fixe $\varepsilon \in \mathcal{O}_{C^\flat}$, avec $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, un système compatible de racines de l'unité et on note

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n}$$

le « $2i\pi$ de Fontaine ».

1.2. Remerciements. — Mes plus vifs remerciements vont à Laurent Fargues qui m'a fait découvrir les espaces de Banach-Colmez et m'a posé la question qui est à l'origine de ce texte. Sans ses nombreuses suggestions, ses corrections et ses encouragements, ce travail n'aurait probablement pas abouti. Je remercie Peter Scholze pour deux suggestions décisives et une invitation à l'Université de Bonn lors de la rédaction de ce texte, ainsi que Jean-Marc Fontaine pour son intérêt pour mon travail. Je tiens également à remercier Gabriel Dospinescu pour des conversations utiles sur la cohomologie pro-étale, Matthew Morrow pour ses commentaires sur [**7**], et tous les deux pour leur patience à l'écoute de mes approximations. Bien que je n'aie finalement pas eu à faire usage des techniques de [**9**], je suis reconnaissant à Lawrence Breen pour ses explications à leur sujet. Enfin, Quentin Guignard et Joaquín Rodrigues Jacinto ont eu la gentillesse de me faire part de leurs commentaires sur une version préliminaire de ce texte ; je les en remercie.

7. Ce point de vue est esquissé à la fin de [**42**].

2. La catégorie des espaces de Banach-Colmez

Dans cette section, nous définissons les espaces de Banach-Colmez comme faisceaux pro-étales sur la catégorie des espaces perfectoïdes sur $\mathrm{Spa}(C)$ (définition 2.11). Nous expliquons ensuite pourquoi les *revêtements universels* de groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$ donnent naissance à des espaces de Banach-Colmez, ce qui permet d'en fabriquer des exemples explicites (corollaire 2.23).

2.1. Espaces perfectoïdes, topologie pro-étale et v-topologie. — Dans tout ce paragraphe, $K = C$ ou $K = C^\flat$.

Définition 2.1. — Une *K-algèbre perfectoïde* est une K-algèbre de Banach R *uniforme*, i.e. telle que l'ensemble R° des éléments de R à puissances bornées soit borné, et telle que le Frobenius $\Phi : R^\circ/p \to R^\circ/p$ soit surjectif (en particulier, une $C^\flat$-algèbre perfectoïde est simplement une $C^\flat$-algèbre de Banach uniforme et parfaite).

Si R est une C-algèbre perfectoïde, le *basculement* $R^\flat$ est défini par

$$R^{\flat,\circ} = \varprojlim_{\Phi} R^\circ/p \quad ; \quad R^\flat = R^{\flat,\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{C^\flat}} C^\flat.$$

C'est une $C^\flat$-algèbre perfectoïde, et $(R^\flat)^\circ = R^{\flat,\circ}$. On dispose d'une application continue et multiplicative $R^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R \to R$ de projection sur la première coordonnée, notée $f \mapsto f^\sharp$.

Définition 2.2. — Une *K-algèbre affinoïde perfectoïde* est un couple (R, R^+), avec R une K-algèbre perfectoïde et $R^+ \subset R^\circ$ un sous-anneau ouvert intégralement clos.

Théorème 2.3. — *Soit (R, R^+) une K-algèbre perfectoïde et $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$. Alors $\mathcal{O}_X$ est un faisceau et pour tout ouvert rationnel $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$ est encore une K-algèbre perfectoïde.*

Si $(R^\flat, R^{\flat +})$ est la basculée de (R, R^+), l'application qui à $x \in X$ associe $x^\flat \in X^\flat = \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat +})$, défini par $|f(x^\flat)| = |f^\sharp(x)|$ [8], si $f \in R$, induit un homémorphisme entre X et $X^\flat$ qui identifie les ouverts rationnels.

Définition 2.4. — Un *espace perfectoïde* sur K est un espace adique sur K recouvert par des ouverts isomorphes à $\mathrm{Spa}(R, R^+)$, pour certaines K-algèbres perfectoïdes (R, R^+). On notera Perf_K la catégorie des espaces perfectoïdes sur K.

Introduisons maintenant deux topologies de Grothendieck sur la catégorie Perf_K, la topologie pro-étale et la v-topologie.

Définition 2.5. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre espaces adiques analytiques [9] sur K. Le morphisme f est dit *affinoïde pro-étale* si $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ et $Y = \mathrm{Spa}(S, S^+)$ sont affinoïdes et si $Y = \varprojlim Y_i \to X$ s'écrit comme limite projective cofiltrante de morphismes étales $Y_i \to X$, avec $Y_i = \mathrm{Spa}(S_i, S_i^+)$ affinoïde. Le morphisme $f : X \to Y$ est dit *pro-étale* s'il est affinoïde pro-étale localement sur X et sur Y.

Définition 2.6. — i) Le *gros site pro-étale de K*, noté $\mathrm{Perf}_{K,\text{proét}}$ [10], est la topologie de Grothendieck sur Perf_K pour laquelle une famille de morphismes $\{f_i : S_i \to S, i \in I\}$ est

8. Rappelons que $|f(x)|$ est la notation consacrée pour $x(f)$.

9. Rappelons qu'un point d'un espace adique est dit *non analytique* si la valuation correspondante a un noyau ouvert. Un espace adique est dit *analytique* si aucun de ses points n'est non analytique. De façon équivalente, il peut être recouvert par des ouverts $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ avec R un anneau de Huber-Tate. En particulier, un espace perfectoïde est analytique.

10. Dans la suite, on aura à considérer des groupes d'extensions entre faisceaux sur le site $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$. Pour éviter les problèmes de théorie des ensembles, on se restreindra aux espaces perfectoïdes X sur C, avec $\mathrm{card}(|X|) < \kappa$, κ étant un cardinal inaccessible (donc non dénombrable). Cela suffit à garantir que tout objet du site est localement sympathique (voir plus loin). Même convention pour les groupes de cohomologie pro-étale et les groupes de v-cohomologie d'un espace adique analytique.

un recouvrement si chaque f_i est pro-étale et si pour tout ouvert quasi-compact U de S, il existe un ensemble fini d'indices $J \subset I$ et des ouverts quasi-compacts $U_i \subset S_i$ pour chaque $i \in J$, tels que $U = \bigcup_{i\in J} f_i(U_i)$.

ii) Soit Y un espace adique analytique sur K. Le *petit site pro-étale de* Y est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des $f : X \to Y$ pro-étales sur Y, $X \in \mathrm{Perf}_K$, avec les recouvrements définis de façon analogue à ce qui précède.

iii) Le *v-site de* K, noté $\mathrm{Perf}_{K,v}$, est la topologie de Grothendieck sur Perf_K pour laquelle une famille de morphismes $\{f_i : S_i \to S, i \in I\}$ est un recouvrement si pour tout ouvert quasi-compact U de S, il existe un ensemble fini d'indices $J \subset I$ et des ouverts quasi-compacts $U_i \subset S_i$ pour chaque $i \in J$, tels que $U = \bigcup_{i\in J} f_i(U_i)$.

Théorème 2.7. — *Le foncteur basculement induit des équivalences entre sites* $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}} \simeq \mathrm{Perf}_{C^\flat,\text{proét}}$ *et* $\mathrm{Perf}_{C,v} \simeq \mathrm{Perf}_{C^\flat,v}$.

2.2. La catégorie $\mathcal{BC}$.

— Donnons deux exemples simples de faisceaux pour la v-topologie (et donc pour la topologie pro-étale).

Théorème 2.8. — *Le préfaisceau* $\mathbf{G}_a$ *qui à* $S \in \mathrm{Perf}_C$ *associe* $\mathcal{O}_S(S)$ *est un faisceau pour la* v*-topologie (et donc aussi pour la topologie pro-étale).*

La preuve de ce résultat est difficile ([**52**, Th. 8.7]). Le faisceau $\mathbf{G}_a$ est représenté par $\mathbf{A}^1_C$, la droite affine adique sur C (qui n'est pas un espace perfectoïde).

Proposition 2.9. — *Soit* T *un espace topologique. Le préfaisceau* $\underline{T}$ *qui envoie* $S \in \mathrm{Perf}_C$ *sur* $\mathcal{C}^0(|S|, T)$ *est un faisceau pour la* v*-topologie (et donc aussi pour la topologie pro-étale). Si* T *est totalement discontinu et* S *quasi-compact quasi-séparé,* $\underline{T}(S) = \mathcal{C}^0(\pi_0(S), T)$.

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**8**, Lem. 4.2.12] : le point clé est qu'un morphisme quasi-compact quasi-séparé surjectif $f : S' \to S$ entre espaces perfectoïdes quasi-compacts quasi-séparés est une application quotient au niveau des espaces topologiques sous-jacents (car généralisante), i.e. si $U \subset S$, U est ouvert dans S si et seulement si $f^{-1}(U)$ l'est dans S'. □

Si T est supposé profini, en écrivant T comme limite projective d'ensembles finis, on obtient que $\underline{T}$ est en fait représenté par l'espace perfectoïde $\mathrm{Spa}(\mathcal{C}^0(T, C), \mathcal{C}^0(T, \mathcal{O}_C))$.

Définition 2.10. — On appellera $\mathbf{Q}_p$*-Espace Vectoriel de dimension finie* un faisceau de la forme $\underline{V}$, où V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie [11] et C*-Espace Vectoriel de dimension finie* un faisceau de la forme $W \otimes_C \mathbf{G}_a$, où W est un C-espace vectoriel de dimension finie.

Ce texte est consacré à l'étude de la catégorie abélienne suivante.

Définition 2.11. — La catégorie $\mathcal{BC}$ des *espaces de Banach-Colmez* est la plus petite sous-catégorie abélienne stable par extensions contenant les faisceaux $\underline{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{G}_a$, de la catégorie des faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$.

En particulier, cette catégorie contient évidemment tous les $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie et tous les C-Espaces Vectoriels de dimension finie. Dans la suite, on notera simplement $\mathbf{Q}_p$ au lieu de $\underline{\mathbf{Q}_p}$, pour alléger les notations.

Remarques 2.12. — a) On obtiendrait une catégorie équivalente en remplaçant $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ par $\mathrm{Perf}_{C,v}$ (cf. la remarque 4.2).

b) Cette définition est en fait équivalente à la définition originale de Colmez, qui était formulée différemment, comme on le verra plus loin (corollaire 7.11).

11. Pour alléger les notations, on notera le plus souvent simplement V au lieu de $\underline{V}$.

c) On pourrait remplacer $\mathbf{Q}_p$ par un corps local E de caractéristique p, C par $C^\flat$, et définir la catégorie des *E-espaces de Banach-Colmez* comme plus petite sous-catégorie abélienne stable par extensions contenant les faisceaux $\underline{E}$ et $\mathbf{G}_a$, de la catégorie des faisceaux de E-espaces vectoriels sur $\mathrm{Perf}_{C^\flat,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ (noter que désormais $\mathbf{G}_a$ est représentable par un objet de $\mathrm{Perf}_{C^\flat}$, à savoir $\mathbf{A}^{1,\mathrm{perf}}_{C^\flat}$).

2.3. Revêtements universels de groupes p-divisibles. — Comment fabriquer des exemples intéressants d'espaces de Banach-Colmez ? Une méthode possible, qui a l'avantage d'être de nature géométrique, est d'utiliser la théorie des groupes p-divisibles. Les résultats de ce paragraphe sont dus à Fargues-Fontaine ([**24**]) et Scholze-Weinstein ([**53**]) ; nous les rappelons pour la commodité du lecteur.

Soit G un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$. Son *revêtement universel* $\tilde{G}$ est le préfaisceau qui associe à une C-algèbre perfectoïde R le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel

$$\tilde{G}(R) = \varprojlim_{\times p} \varprojlim_{k} \varinjlim_{n} G[p^n](R^\circ/p^k).$$

Ce préfaisceau sera vu dans la suite comme un préfaisceau sur $\mathrm{Perf}_{C,\mathrm{pro\acute{e}t}}$, par restriction.

Exemple 2.13. — Si G est un groupe p-divisible *étale* sur $\mathcal{O}_C$, G est isomorphe à $T(G) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, $T(G)$ étant le module de Tate de G. Dans ce cas, on a immédiatement $\tilde{G} = V(G)$ et $\tilde{G}$ est donc un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie.

Proposition 2.14. — *Le foncteur $G \mapsto \tilde{G}$ transforme les isogénies en isomorphismes. De plus, si A est une $\mathcal{O}_C$-algèbre p-adique, $\tilde{G}(A) \simeq \tilde{G}(A/p)$.*

Démonstration. — La première affirmation est une conséquence immédiate du fait que la multiplication par p est un isomorphisme de $\tilde{G}$. Pour la seconde, voir par exemple [**24**, Prop. 4.5.2]. □

Notons H le groupe p-divisible sur $k = \bar{\mathbf{F}}_p$ obtenu en réduisant G modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$. On sait ([**53**, Th. 5.1.4]) que $G \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/p$ est quasi-isogène à $H \otimes_k \mathcal{O}_C/p$. De la proposition précédente on déduit alors facilement :

Lemme 2.15. — *Soit G un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$ et H sa fibre spéciale. Notons $\tilde{H}^{\mathrm{can}}$ le relèvement canonique*[12] *de $\tilde{H}$ à $W(k)$. Alors $\tilde{G} \simeq \tilde{H}^{\mathrm{can}} \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_C$.*

La suite exacte connexe-étale de H :

$$0 \to H^\circ \to H \to H^{\mathrm{et}} \to 0$$

est scindée, puisque k est un corps parfait. On en déduit immédiatement que $\tilde{G}$ est la somme directe d'un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie et du revêtement universel d'un groupe p-divisible connexe en fibre spéciale.

On peut donc supposer désormais G connexe en fibre spéciale (i.e. H connexe). Dans ce cas, le morphisme de systèmes projectifs

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, equal] & H \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "V"] & H \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "V^2"] & \cdots \arrow[l] \\
H & H^{(p^{-1})} \arrow[l, "F"] & H^{(p^{-2})} \arrow[l, "F"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

induit un isomorphisme

$$\tilde{H}(R^\circ/p) \simeq H(R^{\flat\circ}),$$

puisque H étant connexe, il existe une isogénie u et un entier $n \geq 1$ tel que $F^n = p \circ u$. Il existe un entier d tel que H est (non canoniquement) isomorphe à $\mathrm{Spf}(k[[T_1, \ldots, T_d]])$, et

12. Il s'agit du foncteur associant $\tilde{H}(R \otimes_{W(k)} k)$ à une $W(k)$-algèbre adique R. Cf. [**24**, §4.6.3].

donc $H(R^{\flat\circ}) \simeq (R^{\flat\circ\circ})^d$. On en déduit que $\tilde{G}$ est représentable par l'espace perfectoïde qui est l'espace adique fibre générique sur C du formel $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C[[T_1^{1/p^\infty}, \ldots, T_d^{1/p^\infty}]])$. Finalement, on a montré dans tous les cas :

Proposition 2.16. — *Si G est un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$, $\tilde{G}$ est représenté par un espace perfectoïde (c'est donc en particulier un faisceau).*

Proposition 2.17. — *Si G est un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$, le faisceau $\tilde{G}$ est un espace de Banach-Colmez.*

Démonstration. — Comme on l'a noté plus haut, on peut supposer H connexe. Alors $\tilde{G}$ est obtenu en prenant la limite inverse sur la multiplication par p du faisceau associé à la fibre générique adique $\mathcal{G}_\eta^{\mathrm{ad}}$ du schéma en groupes formel $\mathcal{G}$ obtenu en complétant formellement G le long de sa section neutre. Cette fibre générique adique est à distinguer de la fibre générique schématique de G, qui est un schéma en groupes étale sur $\mathrm{Spec}(C)$, donc constant de faisceau associé $T(G) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ainsi que de la fibre générique formelle $\mathcal{G}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_C} C$ de $\mathcal{G}$, qui est isomorphe à $\mathrm{Lie}(G) \otimes \widehat{\mathbf{G}}_a$.

On a une suite exacte d'espaces adiques en groupes ([**19**, Th. 1.2]) :

$$0 \to T(G) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p = \mathcal{G}_\eta^{\mathrm{ad}}[p^\infty] \to \mathcal{G}_\eta^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{Lie}(G) \otimes \mathbf{G}_a = (\mathcal{G}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_C} C)^{\mathrm{ad}} \to 0,$$

donnée par l'application logarithme $\log : \mathcal{G}_\eta^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Lie}(G) \otimes \mathbf{G}_a$, qui est un revêtement au sens de de Jong. On peut appliquer à cette suite exacte le foncteur $\varprojlim_{\mathbf{N}}(\cdot)$, les morphismes de transition étant $(\cdot) \xrightarrow{\times p} (\cdot)$. On obtient une suite exacte de faisceaux pro-étales :

$$0 \to V(G) \to \tilde{G} \to \mathrm{Lie}(G) \otimes \mathbf{G}_a \to 0. \tag{1}$$

Cette suite exacte montre $\tilde{G}$ est un espace de Banach-Colmez. □

Le lemme de Yoneda et le fait que les perfectoïdes forment une base de la topologie pro-étale permettent de voir la catégorie dont les objets sont les revêtements universels de groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$ (et les morphismes les morphismes d'espaces adiques en groupes) comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux abéliens sur $\mathrm{Perf}_{C,\mathrm{proét}}$.

Définition 2.18. — On note $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{BC}$ formée des revêtements universels de groupes p-divisibles.

La théorie des groupes p-divisibles permet de décrire explicitement les objets de $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$:

Soit R une C-algèbre perfectoïde. Le complété p-adique $A_{\mathrm{cris}}(R)$ de l'enveloppe à puissances divisées de la surjection $W(R^{\flat\circ}) \to R^\circ/p$ est l'épaississement à puissances divisées p-adiquement complet universel de R°/p. La construction de $A_{\mathrm{cris}}(R)$ est fonctorielle en R. On note $B_{\mathrm{cris}}^+(R) = A_{\mathrm{cris}}(R)[1/p]$ et simplement B_{cris}^+ si $R = C$. Si Γ est un groupe p-divisible sur R°/p, on notera $\mathbf{M}(\Gamma)$ l'évaluation du cristal de Dieudonné de Γ sur $A_{\mathrm{cris}}(R)$. Si Γ provient par extension des scalaires de k à R°/p d'un groupe p-divisible H, $\mathbf{M}(\Gamma)$ est simplement $M(H) \otimes_L A_{\mathrm{cris}}(R)$, $M(H)$ étant le module de Dieudonné usuel de H. On a le théorème suivant ([**53**, Th. A]) :

Théorème 2.19. — *Si R est une C-algèbre perfectoïde, le foncteur $\Gamma \mapsto \mathbf{M}(\Gamma)[1/p]$ de la catégorie des groupes p-divisibles sur R°/p à isogénie près dans la catégorie des $B_{\mathrm{cris}}^+(R)$-modules finis projectifs avec Frobenius est pleinement fidèle.*

On en déduit la

Proposition 2.20. — *Soit R une C-algèbre affinoïde perfectoïde. On a des isomorphismes fonctoriels en R*

$$\tilde{G}(R) = (B_{\mathrm{cris}}^+(R) \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} M(H))^{\varphi=p}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\tilde{G}(R) = \tilde{H}(R^\circ/p) &= \mathrm{Hom}_{R^\circ/p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, H)[1/p] \\ &= \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris}}(R),\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)[1/p], \mathbf{M}(H)[1/p])\end{aligned}$$

(la dernière égalité venant du théorème 2.19) et d'utiliser la description de $\mathbf{M}(H)$. □

Remarque 2.21. — On a observé plus haut que si H est connexe

$$\tilde{G}(R) = H(R^{\flat\circ})$$

pour toute C-algèbre perfectoïde R. Autrement dit, via l'équivalence de Scholze $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}} \simeq \mathrm{Perf}_{C^\flat,\text{proét}}$, le faisceau $\tilde{G}$ correspond à la fibre générique adique de $H \otimes \mathcal{O}^\flat_C$. Par pleine fidélité du foncteur de Dieudonné (utilisée cette fois-ci sur $\mathcal{O}_{C^\flat}$), si G et G' sont deux groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$ connexes en fibre spéciale :

$$\mathrm{Hom}(\tilde{G}, \tilde{G'}) = \mathrm{Hom}(H \otimes \mathcal{O}_{C^\flat}, H' \otimes \mathcal{O}_{C^\flat}) = \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris}},\varphi}(B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_L M(H), B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_L M(H')),$$

les deux premiers Hom étant des Hom comme faisceaux. Cette remarque sera utile plus loin.

Exemple 2.22. — Soit $G = \mu_{p^\infty}$. Alors $\tilde{G}(R) = B^+_{\mathrm{cris}}(R)^{\varphi=p}$. Si $R = C$, la suite obtenue en prenant les C-points de la suite exacte (1) pour G reste exacte et c'est la suite exacte [13]

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to (B^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p} \xrightarrow{\theta} C \to 0,$$

souvent appelée *suite exacte fondamentale de la théorie de Hodge p-adique*, qui apparaît un peu partout en théorie de Hodge p-adique et est à l'origine de la théorie des espaces de Banach-Colmez.

Corollaire 2.23. — *Tout objet de $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$ est somme directe de faisceaux $\mathbf{U}_\lambda := (B^+_{\mathrm{cris}}(\cdot))^{\varphi^h=p^d}$, avec $0 \leq \lambda = \frac{d}{h} \leq 1$.*

Démonstration. — C'est un corollaire direct de la classification de Dieudonné-Manin qui affirme que la catégorie des isocristaux associés aux groupes p-divisibles sur k est semi-simple, avec un unique objet simple de pente λ pour tout $\lambda \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$, et de la proposition précédente. □

Ce corollaire donne une description agréable de la sous-catégorie $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$. Toutefois à ce stade, la structure de la catégorie $\mathcal{BC}$ tout entière reste encore mystérieuse : elle ne sera élucidée que dans la partie 7. Pour mieux comprendre la catégorie $\mathcal{BC}$, il nous faut commencer par analyser les morphismes et extensions entre $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie et C-Espaces Vectoriels de dimension finie.

3. Quelques calculs de cohomologie pro-étale

Pour mener à bien le calcul des groupes d'extensions de la section 4, il nous faut au préalable être capable de décrire certains groupes de cohomologie pro-étale. Ces calculs ont un intérêt en soi indépendamment du problème que nous avons en vue et les méthodes utilisées permettent de donner des résultats plus généraux et plus précis. Nous les effectuons dans le cas qui nous intéresse : celui de l'espace affine, pour les faisceaux $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{G}_a$. Les mêmes techniques permettent de calculer la cohomologie du disque unité ouvert en toute dimension.

Sauf mention du contraire, tous les groupes de cohomologie considérés sont des groupes de cohomologie pro-étale.

13. Il serait plus habituel d'écrire $\mathbf{Q}_p(1)$ au lieu de $\mathbf{Q}_p$, mais nous voyons simplement ici cette suite exacte comme suite des C-points d'espaces de Banach-Colmez, sans nous préoccuper de l'action de Galois.

Nous allons démontrer les résultats suivants [14].

Théorème 3.1. — *Soit $n \geq 1$ et $i \geq 0$. On a :*

$$H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{G}_a) = \Omega^i(\mathbf{A}_C^n).$$

Théorème 3.2. — *Notons*

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^n) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbf{A}_C^n) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(\mathbf{A}_C^n)$$

le complexe des sections globales du complexe de de Rham de $\mathbf{A}_C^n$. Alors $H^0(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ et pour tout $i > 0$, on a un isomorphisme :

$$H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Q}_p) = \mathrm{Ker}(d_i) = \mathrm{Im}(d_{i-1}) \subset \Omega^i(\mathbf{A}_C^n).$$

Remarque 3.3. — Les cohomologies étale et pro-étale du faisceau constant $\mathbf{Z}/p^k$ sur l'espace affine sont les mêmes, d'après la proposition 3.7 ci-dessous. Or Berkovich [**4**] a prouvé que pour tout $i > 0$, $H^i_{\text{ét}}(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Z}/p^k) = 0$. On en déduit facilement que $H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{Z}_p) = 0$ pour tout $i > 0$. Cela ne contredit évidemment pas le théorème 3.2, puisque l'espace affine n'est pas quasi-compact.

Démonstration du théorème 3.1. — La cohomologie de $\mathbf{G}_a$ se calcule aisément, grâce au résultat remarquable suivant [15] ([**51**, Prop. 3.23], où le faisceau que nous notons $\mathbf{G}_a$ est appelé $\widehat{\mathcal{O}}$) :

Proposition 3.4. — *Soit $n \geq 1$ et $\nu' : \widetilde{\mathbf{A}}^n_{C,\text{proét}} \to \widetilde{\mathbf{A}}^n_{C,\text{ét}}$ le morphisme du topos pro-étale vers le topos étale de $\mathbf{A}_C^n$. On a*

$$R^i\nu'_*\mathbf{G}_a = \Omega^i_{\mathbf{A}_C^n},$$

pour tout $i \geq 0$ (en particulier ces faisceaux sont nuls si $i > n$).

Comme $\mathbf{A}_C^n$ est Stein, donc n'a pas de cohomologie cohérente en degré positif, on en déduit que pour tout i,

$$H^i(\mathbf{A}_C^n, \mathbf{G}_a) = \Omega^i(\mathbf{A}_C^n),$$

grâce à la suite spectrale de Leray pour le morphisme ν. □

La démonstration du théorème 3.2 est plus difficile et le reste de cette section lui est consacré. Nous commençons par le cas de la dimension 1 à l'aide de la suite exacte de Kummer et de théorèmes d'annulation de Berkovich [16]. Puis nous traitons le cas général à l'aide de la version faisceautique de la *suite exacte fondamentale* en théorie de Hodge p-adique. Notons que nous n'utiliserons dans la suite du texte que le calcul de la cohomologie en degrés 0 et 1, pour lequel la suite exacte de Kummer suffit. *Le lecteur qui le souhaite peut donc sauter en première lecture le paragraphe 3.2.*

14. Dans la suite nous ignorons systématiquement l'action de Galois et donc les twists à la Tate dans l'énoncé des résultats, bien qu'il soit facile de les suivre à la trace.

15. Qui est, notamment, à l'origine de la suite spectrale de Hodge-Tate.

16. Dans la suite, nous utiliserons sans plus de commentaire le fait que la cohomologie étale d'un espace analytique Hausdorff au sens de Berkovich est la même que celle de la variété rigide ou de l'espace adique associé. Voir [**35**, Ch. 8].

3.1. Cohomologie de la droite affine. — Rappelons tout d'abord la proposition suivante, qui servira constamment ([**17**, Prop. 13.2.2] et [**17**, Rem. 13.2.4]).

Proposition 3.5. — *Soit I un ensemble ordonné filtrant ayant une partie cofinale dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ un système projectif de groupes abéliens. On note $f_{ij} : A_j \to A_i$ pour $j \geq i$. Si $(A_i)_i$ vérifie la condition de Mittag-Leffler,*

$$R^1 \varprojlim_i A_i = 0.$$

La conclusion reste valable si l'on suppose que chacun des groupes A_i est muni d'une structure d'espace métrique complet compatible à la structure de groupe, que les f_{ij} sont uniformément continues et que pour tout i, il existe $j \geq i$ tel que pour tout $k \geq j$, $f_{ik}(A_k)$ est dense dans $f_{ij}(A_j)$.

Un autre fait utile est le suivant.

Proposition 3.6. — *Soit I un ensemble ordonné filtrant ayant une partie cofinale dénombrable et $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ un système projectif de faisceaux abéliens pour la topologie pro-étale sur un espace adique analytique X, avec morphismes de transition surjectifs. Alors*

$$\forall k > 0,\ R^k \varprojlim_i \mathcal{F}_i = 0.$$

Démonstration. — Voir [**8**, Prop. 3.1.10]. □

On utilisera également le résultat de comparaison suivant.

Proposition 3.7. — *Soit X un espace adique analytique sur C et $\mathcal{F}$ un faisceau étale de groupes abéliens sur X. Notons $\nu : \widetilde{X}_{\text{proét}} \to \widetilde{X}_{\text{ét}}$ le morphisme de topos. Alors pour tout $i \geq 0$,*

$$H^i_{\text{proét}}(X, \nu^*\mathcal{F}) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Ceci est démontré dans [**52**, Prop. 14.8], avec X remplacé par $X^\diamond$, le diamant associé à l'espace adique analytique X. Or la cohomologie pro-étale de X est la même que celle de $X^\diamond$, par définition des sites pro-étales et l'équivalence $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}} \simeq \mathrm{Perf}_{C^\flat,\text{proét}}$. La cohomologie étale de X est aussi la même que celle de $X^\diamond$ car les sites étales de X et $X^\diamond$ sont les mêmes : en effet, les morphismes étales descendent pour la topologie pro-étale [17] (voir la deuxième partie de la preuve de [**52**, Prop. 9.7]). □

Proposition 3.8. — *On note D le disque unité ouvert de dimension 1 sur C. On a $H^i(D, \mathbf{Q}_p) = 0$ pour tout $i > 1$. De plus, $H^1(D, \mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{O}(D)_0$ des fonctions rigides analytiques sur D nulles en zéro.*

Démonstration. — Pour tout $n > 1$, notons $\bar{B}_n = \mathrm{Spa}(C\langle p^{-1/n}T\rangle)$ la boule fermée de rayon $p^{-1/n}$.

Montrons dans un premier temps que $H^i_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p)$ [18] est nul pour $i > 1$. D'après [**3**, Th. 4.2.6], $H^i_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) = 0$ si $i > 2$. On a donc $H^i_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) = 0$ si $i > 2$. La suite exacte de Kummer donne une suite exacte longue

$$0 \to \mathcal{O}(\bar{B}_n)^*/(\mathcal{O}(\bar{B}_n)^*)^{p^k} \to H^1_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) \to H^1_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{G}_m)$$
$$\to H^1_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{G}_m) \to H^2_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) \to H^2_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{G}_m).$$

Or d'après [**3**, Lem. 6.1.2], $H^2_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{G}_m) = 0$; comme on a aussi $\mathrm{Pic}(\bar{B}_n) = 0$ ([**43**, Satz 1]), on obtient

$$H^2_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) = 0.$$

17. Et même pour la v-topologie, cf. [**52**, Prop 9.7].
18. Si X est un espace adique, pour nous $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/p^k)$ et $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_p)[1/p]$, *par définition.*

On en déduit que $H^2_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) = 0$.

Calculons maintenant $H^1(D, \mathbf{Q}_p)$. On regarde la suite exacte [19] :

$$0 \to R^1 \varprojlim_n H^0(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) \to H^1(D, \mathbf{Q}_p) \to \varprojlim_n H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) \to 0.$$

Le terme de gauche est nul (proposition 3.5). Or $H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) = H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Z}_p)[1/p]$ par quasi-compacité de $\bar{B}_n$ ([**57**, Lem. 21.17.1]) et on a une suite exacte (proposition 3.6) :

$$0 \to R^1 \varprojlim_k H^0(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) \to H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Z}_p) \to \varprojlim_k H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Z}/p^k) \to 0,$$

où à nouveau le terme de gauche est nul. La cohomologie du faisceau $\mathbf{Z}/p^k$ sur $\bar{B}_n$ se calcule indifféremment pour la topologie étale ou pro-étale, d'après la proposition 3.7. La suite exacte de Kummer donne donc que pour tout n,

$$H^1_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim_k \mathcal{O}(\bar{B}_n)^*/(\mathcal{O}(\bar{B}_n)^*)^{p^k}.$$

On a

$$\mathcal{O}(\bar{B}_n)^* = C^* \cdot \{1 + \sum_{i\geq 1} a_i X^i, \forall i, |a_i| p^{-i/n} < 1\}.$$

Notons $M_n = \{1 + \sum_{i\geq 1} a_i X^i, \forall i, |a_i| p^{-i/n} < 1\}$, de sorte que l'on a aussi $H^1_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim M_n/M_n^{p^k}$.

Si $f \in M_n$, $\log \circ f$ est bien définie et est un élément de l'espace $\mathcal{O}(\bar{B}_n)_0$ des fonctions rigides analytiques sur $\bar{B}_n$ nulles en zéro. Notons $\Phi_n(f)$ la restriction de cet élément à $\bar{B}_{n-1}$. Nous affirmons que l'application Φ_n s'étend à $\varprojlim M_n/M_n^{p^k}$. En effet, soit $f \in M_n$. Alors $\Phi_n(f) \in \mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0^{\leq r_n}$, où $r_n = \sup\{|z|, z \in \log(B(1, p^{-1/(n(n-1))})\}$ et où $\mathcal{O}(\cdot)_0^{\leq r}$ pour $r > 0$ désigne l'ensemble des fonctions bornées par r. Si $f \in M_n^{p^k}$, $\Phi_n(f) \in p^k \mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0^{\leq r_n}$. On en déduit que Φ_n induit une flèche de $\varprojlim M_n/M_n^{p^k}$ vers le complété p-adique de $\mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0^{\leq r_n}$, qui est $\mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0^{\leq r_n}$ lui-même, et donc en particulier une flèche de $\varprojlim M_n/M_n^{p^k}$ vers $\mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0$. On a donc défini pour chaque n un morphisme

$$\Phi_n : H^1(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) = (\varprojlim_k M_n/M_n^{p^k})[1/p] \to \mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0.$$

Ces flèches sont évidemment compatibles quand n varie et donnent donc un morphisme continu

$$\Phi : H^1(D, \mathbf{Q}_p) \to \varprojlim_n \mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0 = \mathcal{O}(D)_0.$$

C'est un isomorphisme : pour le voir, construisons la bijection réciproque. Soit $g \in \mathcal{O}(D)_0$, vue comme une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{O}(\bar{B}_{n-1})_0$. Pour tout n, g_n est bornée, donc il existe $k_n \geq 0$ tel que $p^{k_n} g_n$ soit à valeurs dans la boule centrée en 0 de rayon $p^{-1/(p-1)}$. Alors $\exp(g_n)$ est bien défini ; c'est une fonction inversible sur $\bar{B}_{n-1}$, que l'on peut en particulier voir comment un élément de $H^1(\bar{B}_{n-1}, \mathbf{Q}_p)$. On pose alors $f_n = p^{-k_n} \exp(g_n) \in H^1(\bar{B}_{n-1}, \mathbf{Q}_p)$ (pour la structure de $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $H^1(\bar{B}_{n-1}, \mathbf{Q}_p)$). Alors $f = (f_n)_n$ est un antécédent de g par Φ.

Pour conclure la preuve de la proposition, il ne reste plus qu'à montrer que les $H^i(D, \mathbf{Q}_p)$ sont nuls pour $i > 1$. Soit B_n la boule ouverte de rayon $p^{-1/n}$. On a une suite exacte

$$0 \to R^1 \varprojlim_n H^1(B_n, \mathbf{Q}_p) \to H^2(D, \mathbf{Q}_p) \to \varprojlim_n H^2(B_n, \mathbf{Q}_p) \to 0.$$

Le terme de gauche s'annule, car les flèches de restriction $\mathcal{O}(B_{n+1})_0 \to \mathcal{O}(B_n)_0$ sont d'image dense (proposition 3.5). De plus dans la limite inverse de droite, on peut remplacer les groupes de cohomologie pro-étale par des groupes de cohomologie étale. En effet, on peut remplacer les B_n par le système cofinal des $\bar{B}_n$. Alors, comme on l'a vu ci-dessus,

19. Dont l'existence découle de la proposition 3.6, mais se vérifie facilement dans ce cas en utilisant [**17**, Prop. 13.3.1].

$H^i(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) = H^i_{\text{ét}}(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p)$ pour tout i (facile). On en déduit avec ce qu'on a dit plus haut que le terme de droite est également nul et donc $H^2(D, \mathbf{Q}_p) = 0$. Enfin pour $i \geq 3$, on utilise la suite exacte

$$0 \to R^1\varprojlim_n H^{i-1}(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) \to H^i(D, \mathbf{Q}_p) \to \varprojlim_n H^i(\bar{B}_n, \mathbf{Q}_p) \to 0$$

et le fait que les termes de gauche et de droite sont nuls (toujours parce qu'on peut remplacer cohomologie pro-étale par cohomologie étale et par le début de la démonstration). $\square$

Remarque 3.9. — Même en dimension 1, il semble plus délicat de décrire *explicitement* le H^1 étale à coefficients $\mathbf{Q}_p$ de la boule ouverte ou fermée, ou le H^1 pro-étale du disque fermé.

On en déduit le cas $n = 1$ du théorème 3.2.

Corollaire 3.10. — *On a $H^i(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p) = 0$ pour tout $i > 1$. De plus, $H^0(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ et $H^1(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{O}(\mathbf{A}^1_C)_0$ des fonctions rigides analytiques sur $\mathbf{A}^1_C$, nulles en 0.*

Démonstration. — Notons pour tout $m > 0$, D_m la boule ouverte de rayon m. L'existence de la suite exacte

$$0 \to R^1\varprojlim_m H^{i-1}(D_m, \mathbf{Q}_p) \to H^i(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p) \to \varprojlim_m H^i(D_m, \mathbf{Q}_p) \to 0$$

et la proposition 3.8 donnent immédiatement le résultat (pour $i = 2$, on utilise une fois de plus la proposition 3.5). $\square$

Notons qu'exactement la même preuve donne également le résultat suivant, en dimension quelconque. C'est de celui-ci que nous ferons usage dans la section 4.

Proposition 3.11. — *Soit $n \geq 1$. On a $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ et $H^1(\mathbf{A}^n_C, \mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'espace des fonctions rigides analytiques sur $\mathbf{A}^n_C$, nulles en 0.*

3.2. Cohomologie de l'espace affine de dimension arbitraire. — Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.2 sans restriction sur la dimension. L'idée est d'exploiter la suite exacte de faisceaux pro-étales [20] :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \to 0. \tag{2}$$

La définition des faisceaux de périodes qui apparaissent dans cette suite exacte et quelques unes de leurs propriétés sont rappelées dans l'appendice 8 ; le point clé est que cohomologie de ces faisceaux est plus accessible que celle de $\mathbf{Q}_p$.

Commençons par l'analyse de la cohomologie de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur la cohomologie des variétés rigides lisses Stein ([**31**]).

Proposition 3.12. — *Soit X un espace Stein lisse sur un corps p-adique K, de dimension d. Les groupes de cohomologie de de Rham de X (au sens de [**31**]) sont les groupes de cohomologie du complexe*

$$\mathcal{O}(X) \to \Omega^1(X) \to \cdots \to \Omega^d(X).$$

Les différentielles sont strictes et les $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$ ont donc une topologie naturelle, qui en fait des K-espaces de Fréchet. La topologie du dual topologique de ces K-espaces de Fréchet est la topologie localement convexe la plus fine.

La dernière assertion traduit le fait que la cohomologie de de Rham des affinoïdes surconvergents est de dimension finie.

20. Cette idée (en remplaçant $\mathbb{B}$ par $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$) nous a été suggérée par Gabriel Dospinescu.

Lemme 3.13. — *Soit K un corps p-adique (c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}_p$), W un K-espace de Banach et $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe strict de K-espaces de Fréchet. Pour tout i,*

$$H^i(\mathcal{C}^\bullet)\widehat{\otimes}_K W \simeq H^i(\mathcal{C}^\bullet\widehat{\otimes}_K W).$$

Démonstration. — On sait qu'il existe un ensemble I tel que $W \simeq \ell_0(I, K)$, car K est de valuation discrète. Comme $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe de Fréchets, d'après [**48**, §17], on a pour tout i

$$\mathcal{C}^i\widehat{\otimes}_K W \simeq \ell_0(I, \mathcal{C}^i).$$

On en déduit immédiatement que pour tout i

$$H^i(\mathcal{C}^\bullet \widehat{\otimes}_K W) \simeq \ell_0(I, H^i(\mathcal{C}^\bullet)),$$

d'où le lemme. □

On en déduit la

Proposition 3.14. — *Soit X une variété rigide lisse et Stein sur un corps p-adique K. Pour toute K-algèbre de Banach W et tout i,*

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X_W) \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K W.$$

Démonstration. — La proposition 3.12 permet d'appliquer le lemme aux complexes des sections globales du complexe de de Rham de X et à W. □

Proposition 3.15. — *Soit X une variété rigide lisse sur un corps p-adique K, de dimension n. On a une suite exacte de faisceaux pro-étales sur X :*

$$0 \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \to \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \to \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \to \cdots \to \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^n_X \to 0.$$

ainsi que pour tout $r \in \mathbf{Z}$ une suite exacte de faisceaux pro-étales sur X :

$$0 \to \mathrm{Fil}^r\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \to \mathrm{Fil}^r\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \to \mathrm{Fil}^{r-1}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_X \to \cdots \to \mathrm{Fil}^{r-n}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^n_X \to 0.$$

Démonstration. — Voir [**50**, Cor. 6.13]. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la notation $\mathcal{O}_X$, Ω^i_X désigne ici les faisceaux pro-étales $\nu^*\mathcal{O}_X$, $\nu^*\Omega^i_X$, ν étant le morphisme de sites de $X_{\text{proét}}$ vers $X_{\text{ét}}$. □

Nous aurons également besoin du fait suivant. On dispose de morphisme de topos :

$$\widetilde{X}_{\text{proét}} \xrightarrow{\nu'} \widetilde{X}_{C,\text{ét}} \xrightarrow{\lambda} \widetilde{X}_{\text{ét}},$$

dont la composée est le morphisme de topos $\nu : \widetilde{X}_{\text{proét}} \to \widetilde{X}_{\text{ét}}$. Le morphisme λ est induit par le morphisme de sites $X_{C,\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ tel que si $U \to X$ est étale, $\lambda^*(U) = U_C$. Le théorème d'Elkik ([**18**]) donne une équivalence :

$$\varprojlim_{K'|K} \widetilde{X}_{K',\text{ét}} \simeq \widetilde{X}_{C,\text{ét}},$$

K' parcourant les extensions de degré fini de K. Si $i < j$ sont deux entiers et $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X, $\mathcal{F}\widehat{\otimes}_K\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^j B_{\mathrm{dR}}$ [21] est un faisceau de $\mathcal{O}_{X_{K'}}$-modules pour toute extension finie K' de K, car B_{dR} est une $\bar{K}$-algèbre. On peut donc par l'équivalence d'Elkik voir $\mathcal{F}\widehat{\otimes}_K\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^j B_{\mathrm{dR}}$ comme un faisceau étale sur X_C, que l'on notera encore $\mathcal{F}\widehat{\otimes}_K\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^j B_{\mathrm{dR}}$ pour simplifier, en particulier dans l'énoncé suivant.

Proposition 3.16. — *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X. Alors, pour tout $i < j$,*

$$R\nu'_*(\mathrm{Fil}^i\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X}/\mathrm{Fil}^j\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) = \mathcal{F}\widehat{\otimes}_K\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^j B_{\mathrm{dR}}.$$

21. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau cohérent sur un espace rigide sur K et W un K-espace de Banach. Le faisceau $\mathcal{G}\widehat{\otimes}_K W$ est le faisceau dont les sections sur un ouvert quasi-compact U sont $\mathcal{G}(U)\widehat{\otimes}_K W$ (noter que $\mathcal{G}(U)$ a une structure naturelle de K-espace de Banach). Il s'agit bien d'un faisceau, puisque $\hat{\otimes}_K W$ préserve les suites exactes, cf. le lemme 3.13.

Démonstration. — Nous affirmons que la flèche naturelle

$$\mathcal{F}\widehat{\otimes}_K \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^j B_{\mathrm{dR}} \to R\nu'_*(\mathrm{Fil}^i \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X}/\mathrm{Fil}^j \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}),$$

est un quasi-isomorphisme filtré, pour les filtrations naturelles des deux côtés. Il suffit de le tester sur les gradués.

On a, par la formule de projection, pour tout k :

$$R\nu'_*(\mathrm{gr}^k \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) = R\nu'_* \mathrm{gr}^k \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\lambda^{-1}\mathcal{O}_X} \lambda^{-1}\mathcal{F}.$$

Or, d'après [**50**, Prop. 6.16 (i)],

$$R\nu'_* \mathrm{gr}^k \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} = \nu'_* \mathrm{gr}^k \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} = \mathcal{O}_{X_C}(k).$$

Décrivons le faisceau $\lambda^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\lambda^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_C}$. Soit U un ouvert étale de X_C. Quitte à rétrécir U, on peut supposer que $U \to X_C$ provient par extension des scalaires d'un ouvert étale $V \to X_{K'}$, avec K'/K finie. Alors on a

$$\lambda^{-1}\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{K''/K' \text{ finie}} \mathcal{F}(V_{K''}).$$

D'où :

$$(\lambda^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\lambda^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_C})(U) = \varinjlim_{K''/K \text{ finie}} \mathcal{F}(V_{K''}) \otimes_{V_{K''}} U = \mathcal{F}_C(U).$$

Par conséquent, on a bien

$$R\nu'_*(\mathrm{gr}^k \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \simeq \lambda^{-1}\mathcal{F}\widehat{\otimes}_K C(k).$$

□

Proposition 3.17. — *Soit $n \geq 1$. On a $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = B^+_{\mathrm{dR}}$ et pour tout $i > 0$,*

$$H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{Ker}(d_i),$$

avec les notations du théorème 3.2.

Démonstration. — Le début de la démonstration s'applique à n'importe quel espace rigide lisse Stein de dimension n défini sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$. Soit $k \geq 1$, et $i > 0$. Considérons la suite spectrale de complexes filtrés

$$E_1^{p,i-p} = H^i(X_C, \mathrm{gr}^p(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k)) \Longrightarrow H^i(X_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k).$$

On va supposer $k > n$ et $k > 2$, ce qui est loisible, puisque l'on prendra à la fin la limite sur $k \to +\infty$. Calculons les termes de la première page. Si $p < 0$ ou $p \geq k$, $E_1^{p,i-p} = 0$. Sinon,

$$\mathrm{gr}^p(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k) = \widehat{\mathcal{O}}_X(p).$$

Or, le lemme de Poincaré 3.15 donne une résolution :

$$0 \to \widehat{\mathcal{O}}_X \to \mathrm{gr}^0 \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{gr}^{-1}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X \to \cdots \to \mathrm{gr}^{-n}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^n_X \to 0.$$

Comme on l'a noté au cours de la preuve de la proposition 3.19,

$$R\nu'_*(\mathrm{gr}^{-k}\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^k_X) = \Omega^k_{X_C}(-k).$$

Les différentielles dans la résolution obtenue en appliquant $R\nu'_*$ à la résolution précédente vont donc de $\Omega^k_{X_C}(-k)$ vers $\Omega^{k+1}_{X_C}(-k-1)$ et sont C-linéaires et compatibles à l'action de Galois, donc forcément nulles. On en déduit que pour tout $p \geq 0$,

$$R\nu'_* \widehat{\mathcal{O}}_X(p) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k_{X_C}(p-k)[-k]$$

et donc que si $0 \leq p < k$,

$$E_1^{p,i-p} = H^i(X_{C,\text{ét}}, R\nu'_* \widehat{\mathcal{O}}_X(p)) = \Omega^i(X_C)(p-i),$$

puisque X_C est Stein.

La différentielle d_1 envoie $E_1^{p,q} = \Omega^{p+q}(X_C)(-q)$ vers $E_1^{p+1,q} = \Omega^{p+1+q}(X_C)(-q)$ et s'identifie à $d_{p+q}(-q)$. Comme on a :

$$E_2^{p,i-p} = \mathrm{Ker}(E_1^{p,i-p} \to E_1^{p+1,i-p})/\mathrm{Im}(E_1^{p-1,i-p} \to E_1^{p,i-p}),$$

on en déduit que si $0 < p < k-1$,

$$E_2^{p,i-p} = H^i_{\mathrm{dR}}(X_C)(p-i) = H^i_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K C(p-i)$$

(la dernière égalité venant de la proposition 3.14), tandis que pour $p = 0$,

$$E_2^{0,i} = \mathrm{Ker}(d_i)(-i)$$

et pour $p = k-1$,

$$E_2^{k-1,i-k+1} = \mathrm{Coker}(d_i)(k-i-1).$$

Prenons maintenant $K = \mathbf{Q}_p$ et $X = \mathbf{A}^n_{\mathbf{Q}_p}$. Sa cohomologie de de Rham en degré positif est triviale.

Montrons par récurrence sur $r \geq 2$ que $E_2^{p,i-p} = E_r^{p,i-p}$ pour tout p et pour tout $i > 0$. Supposons le résultat connu pour un $r \geq 2$. Il suffit pour obtenir le résultat pour $r+1$ de montrer que toutes les différentielles à la r-ème page sont nulles. Alors d_r envoie $E_r^{p,i-p} = E_2^{p,i-p}$ vers $E_r^{p+r,i-p-r+1} = E_2^{p+r,i-p-r+1}$. C'est donc par les calculs précédents la flèche nulle, sauf éventuellement si $p = 0$ et $r = k-1$; dans ce cas, c'est une flèche de $\mathrm{Ker}(d_i)(-i)$ vers $\mathrm{Coker}(d_{i+1})(k-i-2)$. Comme cette flèche est compatible à l'action de Galois, si elle était non nulle, on aurait $-i = k-i-2$, i.e. $k = 2$, ce qu'on a exclu. On en déduit finalement que la suite spectrale dégénère à la deuxième page. Pour tout $i > 0$, on a donc une extension :

$$0 \to \mathrm{Coker}(d_i)(k-i-1) \to H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k) \to \mathrm{Ker}(d_i)(-i) \to 0.$$

Quand on passe de k à $k+1$, la flèche $H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^{k+1}) \to H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k)$ envoie le sous-espace $\mathrm{Coker}(d_i)(k-i)$ sur zéro, par Galois équivariance. Comme d'après la proposition 3.6,

$$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} = R\varprojlim_k \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k,$$

on a en définitive, si $i > 0$ et que l'on oublie l'action de Galois :

$$H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{Ker}(d_i).$$

Il reste à calculer la cohomologie en degré 0. La résolution ci-dessus et la proposition 3.16 donnent que pour tout $k \geq 0$,

$$H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k) = \mathrm{Ker}\left(\mathcal{O}(\mathbf{A}^n_{\mathbf{Q}_p})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B^+_{\mathrm{dR}}/t^k \to \Omega^1(\mathbf{A}^n_{\mathbf{Q}_p})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}}/t^{k-1}B^+_{\mathrm{dR}}\right).$$

C'est donc une extension

$$0 \to B^+_{\mathrm{dR}}/t^k \to H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k) \to \mathcal{O}(\mathbf{A}^n_{\mathbf{Q}_p})/\mathbf{Q}_p\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} C(k-1) \to 0.$$

Quand on passe de k à $k+1$, la flèche naturelle de $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^{k+1})$ vers $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k)$ est la flèche évidente sur le terme de gauche et le morphisme nul sur celui de droite. En prenant la limite inverse sur k, on récupère donc finalement :

$$H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = B^+_{\mathrm{dR}}.$$

□

Remarque 3.18. — Plutôt que d'utiliser la suite spectrale d'un complexe filtré, on pourrait utiliser le quasi-isomorphisme, valable pour toute variété rigide lisse sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, de dimension n :

$$R\nu'_*\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X} = \mathcal{O}_X\widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}} \to \Omega^1_X\widehat{\otimes}_K t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}} \to \cdots \to \Omega^n_X\widehat{\otimes}_K t^{-n}B^+_{\mathrm{dR}}$$

(la différentielle du complexe de droite étant donnée par la différentielle du complexe de Rham de X), qui se montre en reprenant les arguments de la proposition 3.16 et dont on reparlera plus bas (remarque 3.21).

Proposition 3.19. — *Soit $n \geq 1$. On a $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = B_{\mathrm{dR}}$ et pour tout $i > 0$, $H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = 0$.*

Démonstration. — Pour $k \geq 1$, notons $\bar{U}_k$ la boule fermée de rayon p^k et U_k la boule ouverte de rayon p^k. Observons que

$$R\Gamma(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = R \varprojlim_k R\Gamma(\bar{U}_k, \mathbb{B}_{dR}) = R \varprojlim_k (R\Gamma(\bar{U}_k, \mathbb{B}^+_{dR})[1/t]),$$

par quasi-compacité de $\bar{U}_k$. Pour tout k, la flèche

$$R\Gamma(\bar{U}_{k+1}, \mathbb{B}^+_{dR})[1/t] \to R\Gamma(\bar{U}_k, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})[1/t]$$

se factorise à travers $R\Gamma(U_{k+1}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})[1/t]$. Par conséquent, l'isomorphisme précédent peut se réécrire :

$$R\Gamma(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = R \varprojlim_k (R\Gamma(U_k, \mathbb{B}^+_{dR})[1/t]).$$

Or la proposition 3.17, ou plutôt sa preuve (qui s'adapte au cas du disque ouvert, puisque sa cohomologie de de Rham en degré strictement positif est elle aussi triviale), montre que pour tout $i > 0$ et tout $k > 0$, $H^i(U_k, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})$ est annulé par t et que $H^0(U_k, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = B^+_{\mathrm{dR}}$. On en déduit l'énoncé cherché. □

D'où finalement :

Proposition 3.20. — *Le groupe $H^0(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})$ est une extension de $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^n_C)/C$ par $B_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$ et pour tout $i > 0$, $H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{Ker}(d_{i+1}) = \mathrm{Im}(d_i)$.*

Remarque 3.21. — La méthode utilisée permettrait de décrire plus généralement la cohomologie de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},X}$ pour X un espace Stein lisse sur un corps p-adique. La cohomologie de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ se calcule à l'aide du quasi-isomorphisme :

$$R\nu'_*\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X} = \mathcal{O}_X \widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}} \to \Omega^1_X \widehat{\otimes}_K t^{-1} B^+_{\mathrm{dR}} \to \cdots \to \Omega^n_X \widehat{\otimes}_K t^{-n} B^+_{\mathrm{dR}},$$

évoqué dans la remarque 3.18. On déduit de cet isomorphisme l'existence d'un triangle distingué :

$$\Omega^\bullet_X \widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}} \to R\nu'_*\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},X} \to (0 \to \Omega^1_X \widehat{\otimes}_K t^{-1} B^+_{\mathrm{dR}}/t \to \cdots \to \Omega^n_X \widehat{\otimes}_K t^{-n} B^+_{\mathrm{dR}}/t).$$

Le complexe de droite se dévisse lui-même à nouveau comme extension de

$$0 \to 0 \to \Omega^2_X \widehat{\otimes}_K t^{-2} B^+_{\mathrm{dR}}/t^{-1} \to \cdots \to \Omega^n_X \widehat{\otimes}_K t^{-n} B^+_{\mathrm{dR}}/t^{-1}$$

par $\Omega^\bullet_X \widehat{\otimes}_K C(-1)$. L'hypercohomologie de ces complexes se calcule facilement à l'aide de la proposition 3.14. Pour le faisceau $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, sa cohomologie devrait pouvoir se calculer comme dans la preuve de la proposition 3.19, en choisissant un recouvrement affinoïde admissible $(U_k)_k$ de X et une présentation surconvergente de chaque U_k (l'existence d'une telle présentation est garantie par [**18**, Th. 7]) : de cette façon, on peut présenter X comme limite inverse d'espaces Stein (V_k), avec pour tout k, $V_k \subset U_k$.

Voici le résultat que l'on obtient pour X Stein lisse de dimension 1, sous l'hypothèse additionnelle que X est connexe. On a :

$$H^0(X_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = B^+_{\mathrm{dR}} \ ; \ H^i(X_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = 0, \text{ si } i > 1$$

et une extension

$$0 \to H^1_{\mathrm{dR}}(X) \widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}} \to H^1(X_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) \to \Omega^1(X) \widehat{\otimes}_K t^{-1} B^+_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}} \to 0.$$

(on utilise le fait que $H^i_{\mathrm{dR}}(X) = 0$ si $i > 2$, et aussi pour $i = 2$ puisque par dualité de Poincaré $H^2_{\mathrm{dR}}(X) = H^0_{\mathrm{dR},c}(X)^* = 0$). On a aussi :

$$H^0(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = H^1_{\mathrm{dR}}(X) \widehat{\otimes}_K B_{\mathrm{dR}} \ ; \ H^i(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) = 0, \text{ si } i > 1$$

Via ces identifications, la flèche naturelle $H^1(X_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) \to H^1(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})$ se décrit comme suit : sur le sous-espace $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}}$, c'est la flèche évidente $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \widehat{\otimes}_K B^+_{\mathrm{dR}} \to$

$H^1_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K B_{\mathrm{dR}}$; sur le quotient $\Omega^1(X)\widehat{\otimes}_K t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$, c'est la composée de la projection $\Omega^1(X)\widehat{\otimes}_K t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}} \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$ avec l'inclusion $H^1_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K B_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$.

Par conséquent, le groupe $H^0(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})$ est une extension de $\mathcal{O}(X_C)/C$ par $B_{\mathrm{dR}}/B^+_{\mathrm{dR}}$. On a $H^1(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = H^1_{\mathrm{dR}}(X)\widehat{\otimes}_K B_{\mathrm{dR}}/t^{-1}B^+_{\mathrm{dR}}$ et $H^i(X_C, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) = 0$ si $i > 1$.

L'analyse de la cohomologie de $\mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1}$ est plus subtile. On va prouver le résultat suivant.

Proposition 3.22. — *Soit $n \geq 1$. On note D^n le disque unité ouvert de dimension n. Pour tout $i > 0$,*

$$H^i(D^n_C, \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1}) = 0.$$

De même, pour tout $i > 0$,

$$H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1}) = 0.$$

Dans tout ce paragraphe, I désigne un sous-intervalle compact de $]0,1[$ à extrémités des nombres rationnels. Nous allons commencer par décrire la cohomologie du faisceau $\mathbb{B}_I[1/t]$. Modulo une hypothèse formulée ci-dessous (preuve de la proposition 3.27) et appelée $(*)$ [22], nous obtiendrons des résultats plus fins, sans inverser t. Ces résultats conditionnels n'interviennent pas dans la démonstration de la proposition 3.22 ; nous les mentionnons seulement car ils mettent en évidence l'importance du foncteur décalage $L\eta_t$.

Rappelons brièvement pour commencer ce que sont les foncteurs décalage de Berthelot-Ogus. Soit A un anneau et $f \in A$, non diviseur de zéro. Les foncteurs décalage ont été introduits pour la première fois dans [**6**], sur une suggestion de Deligne.

Définition 3.23. — Soit $\delta : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$. Si $K^\bullet$ est un complexe de A-modules tel que K^i est sans f-torsion pour tout i, on définit un nouveau complexe $\eta_{\delta,f}K^\bullet$ par

$$(\eta_{\delta,f}K^\bullet)^j = \{x \in f^{\delta(j)}K^j, dx \in f^{\delta(j+1)}K^{j+1}\}.$$

Si $\delta = \mathrm{Id}$, $\eta_{\mathrm{Id},f}K^\bullet$ est simplement $\eta_f K^\bullet$.

Proposition 3.24. — *Si δ est croissante, $\eta_{\delta,f}$ transforme les quasi-isomorphismes en des quasi-isomorphismes, donc s'étend en un foncteur noté $L\eta_{\delta,f}$ entre catégories dérivées.*

Démonstration. — Voir [**6**, Prop. 8.19]. □

On aura besoin de la proposition suivante, qui explicite l'action des foncteurs décalage sur les complexes de Koszul.

Proposition 3.25. — *Soit A un anneau, $g_1, \dots, g_n \in A$ et $f \in A$ non diviseurs de zéro. Soit M un A-module sans f-torsion. Si $h_1, \dots, h_d$ sont des endomorphismes de M qui commutent, on note $K_M(h_1, \dots, h_d)$ le complexe de Koszul*

$$M \to \bigoplus_{1\leq i\leq d} M \to \bigoplus_{1\leq i_1<i_2\leq d} M \to \cdots \to \bigoplus_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq d} M \to \dots$$

où la différentielle de M en position $i_1 < \cdots < i_k$ vers M en position $j_1 < \dots, < j_{k+1}$ est non nulle seulement si $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{j_1, \dots, j_{k+1}\}$ et vaut dans ce cas $(-1)^{m-1}h_m$, m étant l'unique indice entre 1 et $k+1$ tel que $j_m \notin \{i_1, \dots, i_k\}$.

(i) *Si f divise tous les g_i,*

$$\eta_f K_M(g_1, \dots, g_n) = K_M(g_1/f, \dots, g_n/f).$$

(ii) *S'il existe un i tel que g_i divise f, $\eta_f K_M(g_1, \dots, g_n)$ est acyclique.*

Démonstration. — Voir [**7**, Lem. 7.9]. □

22. Et que nous avons depuis démontrée : cf. [**42**, Prop. 3.11].

Ces définitions s'étendent à un cadre plus général ([**7**, §6.1]) : si $(T, \mathcal{O}_T)$ est un topos annelé, $f \in \mathcal{O}_T$ engendrant un idéal inversible et $K^\bullet$ un complexe de $\mathcal{O}_T$-modules sans f-torsion, on peut définir $\eta_f K^\bullet$ comme précédemment et on montre que le foncteur η_f s'étend à la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_T)$ des $\mathcal{O}_T$-modules.

Soit Z un espace rigide sur C. Spécialisant au cas où T est le topos des faisceaux étales de B_I-modules sur Z, $\mathcal{O}_T = B_I$ et $f = t$, on obtient un complexe $L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_{I,Z}$ dans la catégorie dérivée des faisceaux étales de B_I-modules sur Z.

Avant de calculer la cohomologie du disque ouvert ou de l'espace affine, traitons le cas d'une couronne ouverte. Soit r, r' deux nombres rationnels. Notons

$$\bar{\mathcal{C}}_{r,r'} = \mathrm{Spa}(\mathbf{Q}_p\langle p^r T_1, \dots, p^r T_n, p^{r'} T_1^{-1}, \dots, p^{r'} T_n^{-1}\rangle)$$

la couronne fermée de rayons $p^{-r'}$ et p^r. On notera simplement $\underline{T}$ pour $T_1, \dots, T_n$ et de même pour les autres variables qui apparaissent. On note $\mathcal{C}_{r,r'}$ la couronne ouverte de rayons $p^{-r'}$ et p^r ; c'est une variété Stein.

Lemme 3.26. — *Notons*

$$(R_\infty, R_\infty^+) = (C\langle (p^r \underline{T})^{1/p^\infty}, (p^{r'} \underline{T}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle, \mathcal{O}_C\langle (p^r \underline{T})^{1/p^\infty}, (p^{r'} \underline{T}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle).$$

Alors

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+) = B_I\langle ([p^\flat]^r \underline{X})^{1/p^\infty}, ([p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle,$$

avec pour tout i, $X_i = [T_i]$.

Démonstration. — Pour toute algèbre affinoïde perfectoïde (S, S^+), on a par définition

$$B_I(S, S^+) = W(S^+)\left\langle \frac{[\alpha]}{p}, \frac{p}{[\beta]} \right\rangle,$$

si $I = [a, b]$ et $|\alpha| = a$, $|\beta| = b$. On a donc :

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+) = W(R_\infty^+)\left\langle \frac{[\alpha]}{p}, \frac{p}{[\beta]} \right\rangle.$$

Or

$$W(R_\infty^+) = A_{\inf}\langle ([p^\flat]^r \underline{X})^{1/p^\infty}, ([p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle,$$

comme on le voit immédiatement en utilisant l'adjonction entre vecteurs de Witt et basculement. D'où

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+) = A_{\inf}\langle ([p^\flat]^r \underline{X})^{1/p^\infty}, ([p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle \left\langle \frac{[\alpha]}{p}, \frac{p}{[\beta]} \right\rangle = B_I\langle ([p^\flat]^r \underline{X})^{1/p^\infty}, ([p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle,$$

la dernière égalité étant obtenue en prenant $(S, S^+) = (C, \mathcal{O}_C)$ dans la formule ci-dessus. ☐

Proposition 3.27. — *On a des quasi-isomorphismes :*

$$R\Gamma(\bar{\mathcal{C}}_{r,r',C}, \mathbb{B}_I[1/t]) \simeq \Omega^\bullet(\bar{\mathcal{C}}_{r,r'}) \,\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I[1/t].$$

En outre, si l'on admet l'hypothèse $(*)$ ci-dessous, on a même

$$R\Gamma(\bar{\mathcal{C}}_{r,r',C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_I) \simeq \Omega^\bullet(\bar{\mathcal{C}}_{r,r'}) \,\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I.$$

Démonstration. — Tout d'abord, comme $\mathbb{B}_I \simeq \mathbb{B}_{\varphi^k(I)}$ pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$ et comme (pour la deuxième assertion) $\varphi(t) = pt$, avec p inversible dans B_I, on peut supposer $I \subset [p^{-1}, 1[$. On sait alors que t et $[\varepsilon] - 1$ diffèrent par une unité de B_I.

Notons $R = C\langle p^r \underline{T}, p^{r'} \underline{T}^{-1}\rangle$ et

$$R_\infty = C\langle (p^r \underline{T})^{1/p^\infty}, (p^{r'} \underline{T}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle,$$

comme dans le lemme. Notons $\tilde{C}_{r,r',C} = \mathrm{Spa}(R_\infty, R_\infty^+)$. On sait que

$$H^0(\tilde{C}_{r,r',C}, \mathbb{B}_I) = B_I(R_\infty, R_\infty^+)$$

et que

$$H^i(\tilde{C}_{r,r',C}, \mathbb{B}_I) = 0$$

si $i > 0$, d'après la proposition 8.3. En outre, la proposition 8.4 dit que les sections de $\mathbb{B}_I$ sur le produit fibré de $\tilde{\mathcal{C}}_{r,r',C}$ k-fois avec lui-même au-dessus de $\bar{\mathcal{C}}_{r,r',C}$ sont

$$\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^{k-1}, B_I(R_\infty, R_\infty^+)).$$

La suite spectrale de Cartan-Leray pour le recouvrement pro-étale $\tilde{C}_{r,r',C} \to \bar{C}_{r,r',C}$ dégénère donc et identifie le complexe de cohomologie de $\mathbb{B}_I$ sur $\bar{\mathcal{C}}_{r,r',C}$ au complexe de cohomologie continue du groupe $\mathbf{Z}_p^n$ agissant sur $B_I(R_\infty, R_\infty^+)$; autrement dit, la flèche

$$R\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)) \to R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C}, \mathbb{B}_I)$$

est un quasi-isomorphisme. On a donc également, en appliquant $L\eta_t$ des deux côtés, un quasi-isomorphisme

$$L\eta_t R\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)) \to L\eta_t R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C,\text{ét}}, R\nu'_*\mathbb{B}_I).$$

Le résultat suivant devrait être vrai mais nous ne l'avons pas démontré [(23)]. Nous le formulons donc comme une hypothèse.

Hypothèse $(*)$**.** Soit S un espace affinoïde lisse sur $\mathrm{Spa}(C, \mathcal{O}_C)$. La flèche naturelle

$$L\eta_t R\Gamma(S, \mathbb{B}_I) \to R\Gamma(S_{\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I)$$

est un quasi-isomorphisme.

Si l'on admet cette hypothèse, on a donc un quasi-isomorphisme

$$L\eta_t R\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)) \to R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I).$$

Pour obtenir le premier quasi-isomorphisme de l'énoncé de la proposition, il ne reste donc plus qu'à calculer le membre de gauche, ce que nous allons faire à l'aide des complexes de Koszul. On note $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ le système de générateurs canonique de $\mathbf{Z}_p^n$. Le lemme 3.26 affirme que

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+) = B_I\langle([p^\flat]^r \underline{X})^{1/p^\infty}, ([p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1})^{1/p^\infty}\rangle,$$

avec pour tout i, $X_i = [T_i]$. On peut donc décomposer :

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+) = B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}} \oplus B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{nonint}},$$

avec $B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}} = B_I\langle[p^\flat]^r \underline{X}, [p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1}\rangle$ et $B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{nonint}}$ le sous-$B_I\langle[p^\flat]^r \underline{X}, [p^\flat]^{r'} \underline{X}^{-1}\rangle$-module complet de $B_I(R_\infty, R_\infty^+)$ engendré par les monômes à coefficients non entiers.

Pour tout $i \geq 0$, le groupe de cohomologie $H^i_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{nonint}})$ est annulé par t, et donc

$$L\eta_t R\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{nonint}}) = 0.$$

La preuve de cette assertion est tout à fait analogue à celle de [**7**, Lem. 9.6] : on montre que la multiplication par t sur $R\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^n, B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{nonint}})$ est homotope à zéro. En écrivant ce complexe de cohomologie comme complexe de Koszul, on se ramène à fabriquer l'homotopie pour le complexe

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}}.([p^\flat]^{\rho_i} X_i)^{a(i)} \prod_{j \neq i}([p^\flat]^{\rho_j} X_j)^{a(j)} \xrightarrow{\gamma_i - 1} B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}}.([p^\flat]^{\rho_i} X_i)^{a(i)} \prod_{j \neq i}([p^\flat]^{\rho_j} X_j)^{a(j)},$$

avec $1 \leq i \leq n$, $a(i) = m/p^r$, $r \geq 1$ et $m \in \mathbf{Z} \backslash p\mathbf{Z}$, qui est quasi-isomorphe au complexe

$$B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\gamma_i[\varepsilon^{m/p^r}]-1} B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}}.$$

On conclut pour ce complexe en utilisant le fait que t divise $\gamma_i^{p^{r-1}} - 1$ (ici on utilise l'hypothèse sur I). Nous renvoyons à loc. cit. pour les détails.

23. Il l'est désormais : cf. [**42**, Prop. 3.11].

Au contraire, dans le complexe de Koszul de $B_I(R_\infty, R_\infty^+)^{\mathrm{int}}$, toutes les flèches sont divisibles par t, donc on a d'après la proposition 3.25 (ii) :

$$L\eta_t K_{B_I(R_\infty,R_\infty^+)^{\mathrm{int}}}(\gamma_1-1,\dots,\gamma_n-1) = K_{B_I\langle[p^\flat]^r\underline{X},[p^\flat]^r\underline{X}^{-1}\rangle}(\frac{\gamma_1-1}{t},\dots,\frac{\gamma_n-1}{t}).$$

On sait qu'à une unité de B_I près, pour chaque i, $\frac{\gamma_i-1}{t}$ et $X_i d/dX_i$ coïncident ([**7**, Lem. 12.3]). Le complexe considéré est donc quasi-isomorphe au complexe

$$K_{B_I\langle[p^\flat]^r\underline{X},[p^\flat]^{r'}\underline{X}^{-1}\rangle}\left(X_1\frac{d}{dX_1},\dots,X_n\frac{d}{dX_n}\right),$$

qui est lui-même quasi-isomorphe au complexe de de Rham

$$\Omega^\bullet(\bar{\mathcal{C}}_{r,r'})\,\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}B_I.$$

en utilisant la base $d\log(X_1),\dots,d\log(X_n)$. Ceci prouve le deuxième quasi-isomorphisme de l'énoncé, modulo l'hypothèse $(*)$.

Enfin, notons que $R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C,\text{ét}}, R\nu'_*\mathbb{B}_I)$ et $L\eta_t R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C}, R\nu'_*\mathbb{B}_I)$ sont tous deux isomorphes à $R\Gamma(\bar{C}_{r,r',C,\text{ét}}, R\nu'_*\mathbb{B}_I[1/t])$ après inversion de t (par quasi-compacité de $\bar{\mathcal{C}}_{r,r'}$) ; par conséquent le premier quasi-isomorphisme de l'énoncé est vrai de façon inconditionnelle. $\square$

Remarque 3.28. — La partie de la preuve ci-dessous qui consiste à exprimer la cohomologie de $\mathbb{B}_I$ comme cohomologie d'un complexe de Koszul est standard depuis Faltings, et valable si l'on remplace l'algèbre R qui y apparaît par une algèbre affinoïde « petite » au sens de Faltings. Néanmoins pour une telle algèbre R, il ne semble pas évident de décrire le complexe de Koszul de $\mathbb{B}_I(R_\infty)$ (R_∞ étant l'extension perfectoïde pro-étale de R déterminée par le choix d'une carte) en termes du complexe de de Rham de $\mathrm{Spa}(R)$. Cela est probablement possible après choix d'un modèle formel convenable de R, mais sûrement délicat à mettre en oeuvre, surtout si l'on veut des quasi-isomorphismes fonctoriels.

En outre, le complexe de de Rham d'un affinoïde n'est pas très sympathique ; il vaut mieux travailler avec des affinoïdes surconvergents. Ce point de vue est exploré dans [**42**].

Passons au cas du disque. On note $\bar{D} = \mathrm{Spa}(\mathbf{Q}_p\langle\underline{T}\rangle)$ le disque unité fermé de dimension n et $\tilde{D}_C = \mathrm{Spa}(C\langle\underline{T}^{1/p^\infty}\rangle)$ le disque unité perfectoïde sur C.

Proposition 3.29. — *On a :*

$$R\Gamma(\bar{D}_C, \mathbb{B}_I[1/t]) = \Omega^\bullet_{\bar{D}}\,\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}B_I[1/t].$$

En outre, si l'hypothèse $(*)$ est valide,

$$R\Gamma(\bar{D}_{C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I) = \Omega^\bullet_{\bar{D}}\,\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}B_I.$$

Démonstration. — Le morphisme $\tilde{D}_C \to \bar{D}_C$ n'est pas un recouvrement pro-étale de $\bar{D}_C$, bien sûr, mais c'en est un recouvrement quasi-pro-étale (c'est-à-dire localement pro-étale pour la topologie pro-étale), et cela nous suffira, puisqu'un faisceau pro-étale est automatiquement un faisceau pour la topologie quasi-pro-étale. La cohomologie de $\mathbb{B}_I$ sur $\tilde{D}_C$ est nulle (proposition 8.3) ; on peut donc calculer la cohomologie de $\mathbb{B}_I$ sur $\bar{D}_C$ comme cohomologie du complexe de Cech pour le recouvrement $\tilde{D}_C \to \bar{D}_C$. Pour le décrire, on utilise le lemme suivant.

Lemme 3.30. — *Pour $i = 1,\dots,n$, on note ev_i l'application d'évaluation en $T_i = 0$. Pour tout $k \geq 1$, le produit fibré k-fois $\tilde{D}_C \times_{\bar{D}_C} \cdots \times_{\bar{D}_C} \tilde{D}_C$ est affinoïde perfectoïde, d'algèbre affinoïde $(A_{n,k}, A_{n,k}^+)$, avec $A_{n,k} = A_{n,k}^+[1/p]$ et $A_{n,k}^+$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^{k-1}, \mathcal{O}_C\langle\underline{T}^{1/p^\infty}\rangle)$ telles que pour tout $0 \leq i_1,\dots,i_j \leq n$, et tout $x = (x_1,\dots,x_{k-1}), y = (y_1,\dots,y_{k-1}) \in \mathbf{Z}_p^{k-1}$ avec $x_l = y_l$ dès que $l \notin \{i_1,\dots,i_j\}$, alors*

$$\mathrm{ev}_{i_1}\circ\cdots\circ\mathrm{ev}_{i_j}\circ f(x) = \mathrm{ev}_{i_1}\circ\cdots\circ\mathrm{ev}_{i_j}\circ f(y).$$

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que l'algèbre affinoïde $(A_{n,k}, A^+_{n,k})$ est une algèbre affinoïde perfectoïde.

Pour alléger les notations, nous ne traitons que le cas $n = 1$, $k = 2$, mais le cas général est parfaitement similaire. Montrons que $\tilde{D} \times_{\bar{D}} \tilde{D}$ et $\mathrm{Spa}(A_{1,2})$ sont isomorphes. On peut définir deux morphismes d'algèbres continus $\lambda, \mu : C\langle \underline{T}^{1/p^\infty}\rangle \to A_{1,2}$: λ envoie $f \in C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ sur la fonction constante égale à f sur $\mathbf{Z}_p$; le second envoie $f \in C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ sur la fonction

$$\mu(f) : \mathbf{Z}_p \to C\langle T^{1/p^\infty}\rangle \ ; \ x \mapsto x \cdot f,$$

$x \cdot f$ désignant l'élément de $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ obtenu en remplaçant dans l'écriture de f chaque terme T^{a/p^m} par $\zeta_{p^m}^{ax} T^{a/p^m}$. L'image de ce morphisme est incluse dans $A_{1,2}$. De plus si $f \in C\langle T\rangle$, l'image de f par ces deux morphismes est la même. En d'autres termes, les deux morphismes d'espaces adiques $\lambda^*, \mu^* : \mathrm{Spa}(A_{1,2}) \to \tilde{D}$ correspondants sont les mêmes après composition avec le morphisme $\tilde{D} \to \bar{D}$. On a donc un morphisme $\mathrm{Spa}(A_{1,2}) \to \tilde{D} \times_{\bar{D}} \tilde{D}$.

Pour montrer que c'est un isomorphisme, nous utiliserons le critère suivant ([**52**, Lem. 5.4]) : un morphisme $f : X \to Y$ quasi-compact quasi-séparé entre espaces perfectoïdes est un isomorphisme si et seulement s'il induit une bijection entre les espaces topologiques sous-jacents et des isomorphismes entre corps résiduels en tous les points de rang 1. Comme le v-recouvrement $\tilde{D} \to \bar{D}$ donne en restriction au disque privé de l'origine un recouvrement pro-étale $\tilde{D}\backslash\{0\} \to \bar{D}\backslash\{0\}$ de groupe $\mathbf{Z}_p$, on sait déjà que le morphisme $\mathrm{Spa}(A_{1,2}) \to \tilde{D} \times_{\bar{D}} \tilde{D}$ considéré est un isomorphisme en dehors de l'unique point de $\tilde{D} \times_{\bar{D}} \tilde{D}$ au-dessus de l'origine. Par le critère ci-dessus, il suffit pour conclure de montrer que la pré-image de ce point est un seul point, de corps résiduel C. Soit donc K un corps contenant C et $\alpha : A_{1,2} \to K$ un morphisme d'algèbres tel que

$$\alpha \circ \lambda = \alpha \circ \mu : C\langle T^{1/p^\infty}\rangle \to K \ ; \ f \mapsto f(0).$$

On peut écrire tout élément de $A_{1,2}$ comme somme d'une constante et d'un élément de $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C\langle T^{1/p^\infty}\rangle)$ dont le terme constant est nul. L'image de ce dernier est nulle. En effet, on peut approcher une fonction localement constante sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$, sans terme constant. L'identité

$$\forall x \in \mathbf{Z}_p,\ \mathbf{1}_{i+p^l\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^l} \sum_{\zeta \in \mu_{p^l}} \zeta^{x-i}$$

si $i \in \mathbf{Z}$ et $l > 0$ montre qu'il suffit de vérifier que l'image de la fonction $x \mapsto \zeta_{p^l}^x T^{a/p^m}$, $a \neq 0$, $l, m \in \mathbf{N}$, est nulle. Or on peut toujours écrire cette fonction comme un multiple de $\mu(T^{1/p^k})$, pour k assez grand, par une fonction de $\mathbf{Z}_p$ dans $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ sans terme constant. Comme l'image de $\mu(T^{1/p^k})$ est nulle, c'est gagné. □

On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^{k-1}, \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_i)) \to A_{n,k} \to A^n_{n-1,k-1} \to 0, \tag{3}$$

la deuxième flèche étant $f \mapsto \oplus\ \mathrm{ev}_i \circ f$ et $A_{-1,k}$ étant C par convention pour tout k.

Montrons que le sous-complexe du complexe de Cech de $\mathbb{B}_I$ (où l'on suppose comme précédemment que $I \subset [p^{-1}, 1[$) pour le recouvrement $\tilde{D}_C \to \bar{D}_C$ dont le k-ème terme est donné par :

$$\mathbb{B}_I(\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^{k-1}, \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_i)))$$

est isomorphe *après application du foncteur décalage* $L\eta_t$ au sous-complexe du complexe $\Omega^\bullet_{\tilde{D}} \widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I$ dont le k-ème terme est formé des $\sum f_{i_1,\dots,i_{k-1}} dT_{i_1} \wedge \dots \wedge dT_{i_{k-1}}$ tels que pour chaque $(i_1, \dots, i_{k-1})$, $f_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ est divisible par $T_1 \dots T_n/(T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}})$.

Le k-ème terme de ce complexe se réécrit :

$$\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^{k-1}, \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i)),$$

où cette fois-ci, $\mathrm{ev}'_i : B_I\langle \underline{X}^{1/p^\infty}\rangle \to B_I$ est l'évaluation en $X_i = 0$, d'après la proposition 8.4 et le lemme 3.26.

C'est donc le complexe standard des cochaînes continues pour l'action du groupe $\mathbf{Z}_p^n$ sur $\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i)$. Il est isomorphe au complexe de Koszul

$$K_{\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i)}(\gamma_1 - 1, \dots, \gamma_n - 1).$$

La suite de l'argument est semblable au raisonnement employé pour prouver 3.27. On décompose :

$$\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i) = (\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{int}} \oplus (\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{nonint}},$$

avec $(\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{int}} = X_1 \dots X_n B_I\langle \underline{X}\rangle$, puis l'on montre exactement de la même manière que la multiplication par t est homotope à zéro sur $K_{(\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{nonint}}}(\gamma_1 - 1, \dots, \gamma_n - 1)$ et que

$$L\eta_t K_{(\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{int}}}(\gamma_1 - 1, \dots, \gamma_n - 1) = K_{(\cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}'_i))^{\mathrm{int}}}(\frac{\gamma_1 - 1}{t}, \dots, \frac{\gamma_n - 1}{t}).$$

Il ne reste donc à la fin que

$$K_{X_1 \dots X_n B_I\langle \underline{X}\rangle}(X_1 \frac{d}{dX_1}, \dots, X_n \frac{d}{dX_n}).$$

Un petit calcul montre que ce complexe est isomorphe au sous-complexe du complexe de de Rham mentionné ci-dessus, via la flèche qui envoie $X_1 \dots X_n f_{i_1,\dots,i_{k-1}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_{k-1}}$ en degré k sur $X_1 \dots X_n X_{i_1}^{-1} \dots X_{i_{k-1}}^{-1} f_{i_1,\dots,i_{k-1}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_{k-1}}$ en degré k.

Finalement, on obtient par récurrence sur n avec la suite exacte (3) que le complexe de Cech de $\mathbb{B}_I$ pour le recouvrement $\tilde{D}_C \to \bar{D}_C$ devient quasi-isomorphe, après qu'on lui a appliqué $L\eta_t$, à $\Omega^\bullet_{\bar{D}} \hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I$. Cela conclut la preuve des quasi-isomorphismes de l'énoncé, modulo l'hypothèse $(*)$ pour le second. $\square$

Armé des propositions 3.27 et 3.29, nous pouvons enfin calculer la cohomologie du faisceau $L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_I$ pour les couronnes et les disques ouverts, ainsi que pour l'espace affine.

Corollaire 3.31. — *Soit r, r' deux rationnels et $i \geq 0$ (éventuellement r ou r' est $+\infty$). On a*

$$H^i(\mathcal{C}_{r,r',C}, \mathbb{B}_I[1/t]) = H^i_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}_{r,r'}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I[1/t] = \bigwedge^i B_I[1/t]^n.$$

Si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée, on a même :

$$H^i(\mathcal{C}_{r,r',C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_I) = H^i_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}_{r,r'}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I = \bigwedge^i B_I^n.$$

Démonstration. — Les deux formules se déduisent de la même façon de la proposition 3.27. Nous expliquons l'argument pour le complexe de faisceaux $L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_I$. En appliquant le même argument en inversant t à chaque étape, on obtiendrait de même le résultat pour $\mathbb{B}_I[1/t]$.

On choisit des réels r_n, r'_n pour tout n de sorte que les couronnes fermées $\bar{\mathcal{C}}_{r_n,r'_n}$ forment un recouvrement admissible de la couronne $\mathcal{C}_{r,r'}$. Si ι_n dénote l'inclusion $\bar{\mathcal{C}}_{r_n,r'_n,C} \to \mathcal{C}_{r,r',C}$, notons $\mathcal{F}_n$ le complexe $R\iota_{n,*} L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_{I,\bar{\mathcal{C}}_{r_n,r'_n,C}}$, de façon que

$$L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_{I,\mathcal{C}_{r,r',C}} = \varprojlim_n \mathcal{F}_n.$$

Nous affirmons que pour tout i,

$$H^i(\mathcal{C}_{r,r',C,\text{ét}}, \varprojlim_n \mathcal{F}_n) = \varprojlim_n H^i(\mathcal{C}_{r,r',C,\text{ét}}, \mathcal{F}_n) = \varprojlim_n H^i(\mathcal{C}_{r_n,r'_n,C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_* \mathbb{B}_I)$$

(la dernière égalité est une conséquence directe de la définition de $\mathcal{F}_n$). Pour cela on applique [**17**, Prop. 13.3.1], ou plutôt [**17**, Rem. 13.3.2 (ii)], dans sa version topologique. Les conditions (i)-(iii) de loc. cit sont trivialement vérifiées en prenant comme base les ouverts étales quasi-compacts [24]. Il faut seulement s'assurer que le système projectif formé des groupes de

24. Dans le cas du faisceau pro-étale $\mathbb{B}_I[1/t]$, on pourrait aussi directement appliquer la proposition 3.6.

cohomologie des $\mathcal{F}_n$ vérifie Mittag-Leffler (topologique). Pour chaque n, choisissons des suites $r_{n,k}, r'_{n,k}$ de réels de sorte que les couronnes fermées $\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k},C}$ soient strictement emboîtées d'intersection $\bar{\mathcal{C}}_{r_n,r'_n,C}$, et considérons

$$\varinjlim_k H^i(\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k},C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I).$$

On a

$$R\varprojlim_n H^i(\mathcal{C}_{r_n,r'_n,C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I) = R\varprojlim_n (\varinjlim_k H^i(\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k},C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I)).$$

Il suffit donc de considérer le membre de droite. Or on a pour tout n, d'après la proposition précédente :

$$\varinjlim_k H^i(\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k},C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I)) \simeq \varinjlim_k H^i(\Omega^\bullet(\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k}})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I).$$

Notons que le membre de droite peut aussi se réécrire

$$\varinjlim_k H^i(\Omega^\bullet(\mathcal{C}_{r_{n,k},r'_{n,k}})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I).$$

Comme une couronne ouverte est Stein, on peut appliquer le lemme 3.13 avec $W = B_I$ comme dans la preuve de la proposition 3.14 ; puisque le foncteur limite inductive est exact, on obtient finalement que pour tout i :

$$\varinjlim_k H^i(\bar{\mathcal{C}}_{r_{n,k},r'_{n,k},C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I)) = \varinjlim_k (H^i_{\text{dR}}(\mathcal{C}_{r_{n,k},r'_{n,k}})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I).$$

Le système projectif quand n varie des groupes de droite est le même que le système projectif formé des $H^i_{\text{dR}}(\mathcal{C}_{r_n,r'_n})^\dagger\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I$, et ces groupes vérifient Mittag-Leffler. Finalement, on a donc pour tout i :

$$H^i(\mathcal{C}_{r,r',C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_{I,\mathcal{C}_{r,r'}}) = \varprojlim_n H^i_{\text{dR}}(\mathcal{C}_{r_n,r'_n})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I,$$

qui est $H^i_{\text{dR}}(\mathcal{C}_{r,r'})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} B_I$. □

Exactement les mêmes arguments, en utilisant cette fois la proposition 3.29, donnent le

Corollaire 3.32. — *Soit X le disque ouvert de dimension n et de rayon r (éventuellement $r = +\infty$, i.e. $X = \mathbf{A}^n$). On a $H^0(X_C, \mathbb{B}_I[1/t]) = B_I[1/t]$ et $H^i(X_C, \mathbb{B}_I[1/t]) = 0$ si $i > 0$. Si l'hypothèse $(*)$ est vraie, on a $H^0(X_{C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I) = B_I$ et $H^i(X_{C,\text{ét}}, L\eta_t R\nu'_*\mathbb{B}_I) = 0$ si $i > 0$.*

Démonstration de la proposition 3.22. — L'inclusion naturelle

$$\mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} \to (\varprojlim_I \mathbb{B}_I[1/t])^{\varphi=1},$$

I décrivant les sous-intervalles compacts de $]0,1[$, est un isomorphisme. On a :

$$R\varprojlim_I \mathbb{B}_I[1/t] = \varprojlim_I \mathbb{B}_I[1/t],$$

en vertu de [**50**, Lem. 3.18] (appliqué en choisissant comme base d'ouverts les affinoïdes perfectoïdes). On déduit donc du corollaire 3.32 que la cohomologie de $\varprojlim_I \mathbb{B}_I[1/t]$ en degré positif est nulle. Par conséquent, la cohomologie de $\mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1}$ est nulle en degré > 1 et est en degré 1 le conoyau de $1-\varphi$ sur $B[1/t]$, c'est-à-dire zéro. □

On peut désormais conclure la preuve du théorème 3.2.

Démonstration du théorème 3.2. — C'est maintenant immédiat : on applique pour finir la suite exacte longue qui se déduit de la « suite exacte fondamentale faisceautique » (2) et les propositions 3.20 et 3.22 donnent que pour tout i,

$$H^i(\mathbf{A}^n_C, \mathbf{Q}_p) = \mathrm{Ker}(d_i) = \mathrm{Im}(d_{i-1}).$$

□

Remarque 3.33. — Colmez, Dospinescu et Nizioł ont annoncé ([**14**]) une description de la cohomologie pro-étale de $\mathbf{Q}_p$ sur un un espace Stein lisse sur un corps p-adique, *ayant un modèle formel p-adique strictement semi-stable*, en termes de la cohomologie de Hyodo-Kato de la fibre spéciale de ce modèle et de la cohomologie de de Rham. Leur démonstration repose sur un théorème de comparaison entre cohomologies étale et syntomique. Dans le cas particulier de l'espace affine, leur argument est présenté dans [**16**].

Notre démonstration est différente puisqu'elle ne fait pas appel à la théorie syntomique. Toutefois, les deux approches sont liées : en effet, la relation entre cohomologies étale et syntomique peut s'interpréter en termes du foncteur décalage $L\eta_t$, comme nous le montrons dans [**41**, §2.8].

4. Groupes d'extensions de certains faisceaux pro-étales

L'objectif de cette section est la démonstration du résultat suivant.

Théorème 4.1. — *Dans la catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens sur* $\mathrm{Perf}_{C,v}$*, on a*

Hom	$\mathbf{G}_a$	$\mathbf{Q}_p$
$\mathbf{G}_a$	C	0
$\mathbf{Q}_p$	C	$\mathbf{Q}_p$

Ext^1	$\mathbf{G}_a$	$\mathbf{Q}_p$
$\mathbf{G}_a$	C	C
$\mathbf{Q}_p$	0	0

Ext^2	$\mathbf{G}_a$	$\mathbf{Q}_p$
$\mathbf{G}_a$	0	0
$\mathbf{Q}_p$	0	0

(ces tableaux se lisant de gauche à droite).

La stratégie générale pour ce faire est la suivante :

Soit G un groupe abélien dans un topos $\mathcal{T}$. Il existe une résolution canonique de G de longueur infinie par un complexe dont chaque composante est une somme de termes de la forme $\mathbf{Z}[G^i \times \mathbf{Z}^j]$, dont on trouvera une construction dans le style cubique dans [**44**] ou dans le cadre simplicial dans [**36**]. Soit $n > 0$ un entier. Si on ne s'intéresse qu'aux calculs des groupes Ext^i avec $i < n$, il suffit de se donner une résolution partielle de G de longueur n, i.e. un complexe C d'objets de ce topos, concentré en degrés négatifs, muni d'un morphisme d'augmentation $C \to G$ (G vu comme complexe concentré en degré 0) induisant un isomorphisme $H^0(C) \simeq G$ et tel que $H^i(C) = 0$ si $i \neq 0, -n$. Le triangle distingué

$$H^{-n}(C)[n] \to C \to G \xrightarrow{+1}$$

montre que si G' est un autre groupe abélien du topos $\mathcal{T}$, en appliquant à ce triangle le foncteur $R\mathrm{Hom}(\cdot, G')$ on obtient des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(G, G') \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(C, G')$$

pour tout $0 \leq i < n$.

Pour $n = 3$, ce complexe est construit dans [**5**] en tronquant le complexe d'Eilenberg-MacLane stabilisé de [**44**] et [**36**], et s'explicite comme suit :

$$\mathbf{Z}[G^4] \times \mathbf{Z}[G^3] \times \mathbf{Z}[G^3] \times \mathbf{Z}[G^2] \times \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{Z}[G^3] \times \mathbf{Z}[G^2] \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{Z}[G^2] \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{Z}[G].$$

L'augmentation vers G est le morphisme canonique $\varepsilon : \mathbf{Z}[G] \to G$. Les flèches sont définies par :

$$\partial_1[x, y] = [x + y] - [x] - [y],$$
$$\partial_2[x, y, z] = [x + y, z] - [y, z] - [x, y + z] + [x, y],$$
$$\partial_2[x, y] = [x, y] - [y, x],$$
$$\partial_3[x, y, z, w] = -[y, z, w] + [x + y, z, w] - [x, y + z, w] + [x, y, z + w] - [x, y, z],$$
$$\partial_3[x, y, z] = -[y, z] + [x + y, z] - [x, z] - [x, y, z] + [x, z, y] - [z, x, y]$$

pour le premier facteur $\mathbf{Z}[G^3]$,

$$\partial_3[x, y, z] = -[x, z] + [x, y + z] - [x, y] + [x, y, z] - [y, x, z] + [y, z, x]$$

pour le second facteur $\mathbf{Z}[G^3]$,

$$\partial_3[x,y] = [x,y] + [y,x],$$
$$\partial_3[x] = [x,x].$$

Si G' est un autre groupe abélien du topos $\mathcal{T}$, on a une suite spectrale (complexe filtré)

$$E_1^{pq} = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{T}}(C^{-p}, G') \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{T}}(C, G').$$

Le point est maintenant que les groupes E_1^{pq} se calculent plus facilement, puisque si G et G' sont deux groupes abéliens du topos des faisceaux sur un espace muni d'une topologie de Grothendieck et que G est représentable, alors pour tout $i \geq 0$ et tout $k \geq 1$,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\mathbf{Z}[G], G') = H^i_{\mathcal{T}}(G, G').$$

Dans la suite, le topos $\mathcal{T}$ sera le topos $\mathbf{Z} - \mathrm{Sh}$ des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$; G et G' seront soit le faisceau constant $\mathbf{Q}_p$ soit $\mathbf{G}_a$.

Pour calculer les groupes d'extensions entre G et G', on est donc ramené à calculer des groupes de cohomologie pro-étale et à analyser des morphismes entre ces groupes de cohomologie.

Remarque 4.2. — On pourrait en fait, comme on l'a indiqué dans la remarque 2.12, remplacer partout la topologie pro-étale par la v-topologie. En effet, d'après [**52**, Prop. 14.7], on sait que si X est un espace adique analytique sur C et X le diamant sur $\mathrm{Spa}(C^\flat)$ associé, $\mathcal{F}$ un faisceau pro-étale de groupes abéliens sur X et $\mu : X^\diamond_v \to X^\diamond_{\text{proét}}$ le morphisme de sites, alors pour tout $i \geq 0$,

$$H^i_v(X^\diamond, \mu^*\mathcal{F}) = H^i_{\text{proét}}(X, \mathcal{F}),$$

et donc les calculs de la section précédente peuvent aussi être vus comme des calculs de v-cohomologie.

4.1. Le cas $G = \mathbf{G}_a$, $G' = \mathbf{Q}_p$. — On veut calculer les groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}_p)$ pour $i = 0, 1, 2$. On va montrer que pour $i = 1$ ce groupe est un C-espace vectoriel de dimension 1 et qu'il est nul pour $i = 0, 2$.

Pour $i = 0$, on a une flèche $\mathrm{Hom}(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{Q}_p)$, qui est

$$H^0(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathbf{A}^2_C, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \quad ; \quad x \mapsto x - x - x = -x,$$

donc évidemment injective. Par conséquent, $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}_p) = 0$.

Pour $i = 2$, il y a trois flèches à analyser :

$$\mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-3}, \mathbf{Q}_p),$$
$$\mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Ext}^1(C^{-2}, \mathbf{Q}_p),$$
$$\mathrm{Ext}^2(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Ext}^2(C^{-1}, \mathbf{Q}_p).$$

La dernière flèche a un noyau nul, puisque $\mathrm{Ext}^2(C^0, \mathbf{Q}_p) = H^2(\mathbf{A}^1_C, \mathbf{Q}_p) = 0$ d'après la proposition 3.10. La première flèche envoie $(x, y) \in \mathbf{Q}_p^2 = H^0(\mathbf{A}^3_C, \mathbf{Q}_p) \oplus H^0(\mathbf{A}^2_C, \mathbf{Q}_p)$ sur $(-x, -2y, 2(x-y), 2y, y)$, donc est injective. Il reste à étudier la deuxième flèche. Elle va de $H^1(\mathbf{A}^2_C, \mathbf{Q}_p) \simeq \mathcal{O}(\mathbf{A}^2_C)_0$ vers $H^1(\mathbf{A}^3_C, \mathbf{Q}_p) \oplus H^1(\mathbf{A}^2_C, \mathbf{Q}_p) \simeq \mathcal{O}(\mathbf{A}^3_C)_0 \oplus \mathcal{O}(\mathbf{A}^2_C)_0$ et envoie $f(X,Y)$ sur $(f(X+Y,Z) - f(X,Y+Z) + f(X,Y) - f(Y,Z), f(X,Y) - f(Y,X))$. Soit f dans le noyau. Ecrivons $f = \sum_{q \geq 1} f_q$, où pour tout q, f_q est un polynôme homogène en X, Y de degré q. D'après [**40**, Lem. 3], f_q est un multiple scalaire de C_q pour tout $q \geq 2$. Autrement dit, f est dans l'image de la flèche

$$\mathrm{Ext}^1(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{Q}_p) \quad ; \quad f(X) \mapsto f(X+Y) - f(X) - f(Y).$$

Tous les termes en degré 2 de la deuxième page de la suite spectrale sont nuls et on a donc bien en définitive $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}_p) = 0$.

Pour $i = 1$, il s'agit d'analyser les flèches

$$\mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{Q}_p),$$

$$\mathrm{Ext}^1(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{Q}_p).$$

La première flèche est la flèche nulle de $H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ vers $H^0(\mathbf{A}_C^3, \mathbf{Q}_p) \oplus H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p^2$. On a aussi une flèche $\mathrm{Hom}(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{Q}_p)$, qui est

$$H^0(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \quad ; \quad x \mapsto x - x - x = -x,$$

et est donc surjective. Donc le noyau de $\mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{Q}_p)$ est inclus dans l'image de $\mathrm{Hom}(C^0, \mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{Q}_p)$. Donc $E_2^{1,0} = 0$.

La seconde flèche va de $\mathrm{Ext}^1(C^0, \mathbf{Q}_p) = H^1(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{Q}_p)$ vers $\mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{Q}_p) = H^1(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{Q}_p)$. Elle envoie $f(X) \in \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)_0$ sur $f(X+Y) - f(X) - f(Y)$. Si f est dans le noyau, f est donc nécessairement un multiple scalaire de l'identité Id. Donc $E_2^{0,1} = C$.

A la r-ème page de la suite spectrale, la différentielle d_r envoie $E_r^{p,q}$ vers $E_r^{p+r,q-r+1}$. Donc

$$E_r^{0,1} = \mathrm{Ker}(E_r^{0,1} \to E_r^{r,2-r})/\mathrm{Im}(E_r^{-r,r} \to E_r^{0,1}) = \mathrm{Ker}(E_r^{0,1} \to E_r^{r,2-r}).$$

Or on vient de voir que pour $r = 2$, $E_2^{k,2-k} = 0$ pour tout k. Il en est donc de même pour tout $r \geq 2$ et on a ainsi pour tout r, $E_r^{0,1} = E_2^{0,1}$. On a donc finalement $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}_p) \simeq C$. Si G et G' sont deux faisceaux abéliens avec G' représentable par Z, une extension

$$0 \to G \to F \to G' \to 0$$

détermine une classe dans $H^1(Z, G)$ qui est l'image de $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(G', G') = G'(Z) = H^0(Z, G')$ par la flèche de connexion déduite de la suite exacte précédente. Ici, l'isomorphisme $\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)/C \simeq H^1(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{Q}_p)$ utilisé est le morphisme de connexion déduit de la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0.$$

En prenant le tiré en arrière de cette extension le long de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on obtient une extension

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \simeq \mathbf{G}_a \to 0,$$

qui est celle donnée par l'application θ de Fontaine. L'identité de $\mathbf{G}_a$ dans lui-même correspond à la fonction identité dans $H^0(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{G}_a) = \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)$. La flèche composée $H^0(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{G}_a) \to H^0(\mathbf{A}_C^1, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to H^1(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{Q}_p)$ est la flèche quotient $\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1) \to \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)/C$. On en déduit que l'élément $\mathrm{Id} \in \mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}_p)$ exhibé ci-dessus correspond à l'extension $\mathbb{B}^{\varphi=p}$ de $\mathbf{G}_a$ par $\mathbf{Q}_p$ donnée par l'application θ de Fontaine.

4.2. Le cas $G = G' = \mathbf{G}_a$. — Pour $i = 0$, on a une flèche $\mathrm{Hom}(C^0, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{G}_a)$, qui s'identifie à

$$H^0(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{G}_a) = \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1) \to H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{G}_a) = \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^2) \quad ; \quad f(X) \mapsto f(X+Y) - f(X) - f(Y).$$

Son noyau est de dimension 1, engendré par $f(X) = X$. Ainsi $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = C$.

Pour $i = 2$, on regarde

$$\mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Hom}(C^{-3}, \mathbf{G}_a),$$

$$\mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(C^{-2}, \mathbf{G}_a),$$

$$\mathrm{Ext}^2(C^0, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Ext}^2(C^{-1}, \mathbf{G}_a).$$

Le dernier terme est nul. Analysons le premier : la flèche va de $\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^3) \times \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^2)$ vers $\mathcal{O}(\mathbf{A}_C^4) \times \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^3) \times \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^3) \times \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^2) \times \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)$. Les applications considérées (sauf la dernière) préservent le degré. Soit (f,g) dans le noyau. On écrit $f(x,y,z) = \sum_{k,j,l} a_{k,j,l} x^k y^j z^l$ et $g(x,y) = \sum_{k,j} b_{k,l} x^k y^l$. L'annulation sur la composante $\mathbf{A}_C^4$ donne :

$$\binom{k+j}{k} a_{k+j,l,m} - \binom{j+l}{j} a_{k,j+l,m} + \binom{l+m}{l} a_{k,j,l+m} = 0,$$

pour $k, m \neq 0$ (en particulier $a_{k,0,l} = 0$ pour $k, l > 0$). Pour $m \neq 0$, on a aussi

$$\binom{j+l}{j} a_{0,j+l,m} - \binom{l+m}{l} a_{0,j,l+m} = 0$$

et de même en échangeant les rôles de k et m. Enfin $a_{0,j,0} = 0$.

Si $a_{k,1,l} = (k+1)c_{k+1,l} - (l+1)c_{k,l+1}$ pour $k, l > 0$, on vérifie immédiatement par récurrence avec la relation ci-dessus que

$$a_{k,j,l} = \binom{k+j}{j} c_{k+j,l} - \binom{j+l}{j} c_{k,j+l},$$

pour tout $j > 0$. On pose aussi $jc_{0,j} = a_{0,j-1,1}$ pour $j > 0$. Une récurrence immédiate à l'aide de la relation ci-dessus donne $a_{0,j,l} = \binom{j+l}{j} c_{0,j+l}$ pour tout $l > 0$. Enfin on pose $c_{1,k} - c_{k,1} = b_{1,k}$.

Si les $c_{j,k}$ sont ainsi définis, alors la première flèche vers $\mathbf{A}_C^3$ donne $b_{j,k} = c_{j,k} - c_{k,j}$ pour $j > 1$. L'autre flèche donne la même égalité pour $k > 1$. En fin de compte, si l'on pose $h(x,y) = \sum_{k,j} c_{k,j} x^k y^j$, on a

$$f(x,y,z) = h(x+y,z) - h(y,z) - h(x,y+z) + h(x,y) \ ; \ g(x,y) = h(x,y) - h(y,x).$$

En d'autres termes, (f,g) est dans l'image de la flèche $\mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{G}_a)$.

Enfin on regarde le terme du milieu. Soit $\omega \in H^1(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{G}_a) = \Omega^1(\mathbf{A}_C^2)$ dans le noyau, que l'on écrit $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. On a

$$f(x+y,z) - f(x,y+z) + f(x,y) = 0,$$

$$f(x+y,z) - f(y,z) - g(x,y+z) + g(x,y) = 0,$$

$$g(x+y,z) - g(y,z) - g(x,y+z) = 0.$$

On vérifie aisément l'existence de $h \in \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^1)$ telle que $f(x,y) = h(x+y) - h(x)$ et $g(x,y) = g(x+y) - g(x)$. En définitive, $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$.

Pour $i = 1$, il s'agit d'analyser les flèches

$$\mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Hom}(C^{-2}, \mathbf{G}_a),$$

$$\mathrm{Ext}^1(C^0, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(C^{-1}, \mathbf{G}_a).$$

La première va de $H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{G}_a) = \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^2)$ dans $H^0(\mathbf{A}_C^3, \mathbf{G}_a) \oplus H^0(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{G}_a) = \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^3) \oplus \mathcal{O}(\mathbf{A}_C^2)$ et envoie $f(X,Y)$ sur $(f(X+Y,Z) - f(Y,Z) - f(X,Y+Z) + f(X,Y), f(X,Y) - f(Y,X))$. Son noyau, toujours d'après [**40**, Lem. 3], est inclus dans l'image de la flèche $\mathrm{Hom}(C^0, \mathbf{G}_a) \to \mathrm{Hom}(C^{-1}, \mathbf{G}_a)$ ci-dessus.

La deuxième flèche va de $H^1(\mathbf{A}_C^1, \mathbf{G}_a) = \Omega^1(\mathbf{A}_C^1)$ vers $H^1(\mathbf{A}_C^2, \mathbf{G}_a) = \Omega^1(\mathbf{A}_C^2)$. Elle envoie ω sur $m^*\omega - p_1^*\omega - p_2^*\omega$ (on a noté p_1, p_2 les deux morphismes de projection de $\mathbf{A}_C^1 \times \mathbf{A}_C^1$ vers $\mathbf{A}_C^1$ et $m : \mathbf{A}_C^1 \times \mathbf{A}_C^1 \to \mathbf{A}_C^1$ le morphisme de multiplication). Son noyau est l'espace des formes différentielles invariantes par translation sur $\mathbf{A}_C^1$, donc est de dimension 1.

Le cas $i = 2$ déjà traité permet comme ci-dessus de voir que $E_r^{0,1} = E_2^{0,1}$ pour tout $r \geq 2$: ainsi, $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = C$. Identifions la classe correspondant à la forme différentielle invariante dT. L'identification $R^1\nu_* \mathbf{G}_{a,X} \simeq \Omega_X^1$ est le morphisme de connexion déduit de la suite exacte

$$0 \to \mathbf{G}_{a,X}(1) \to \mathrm{gr}^1 \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \to \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{G}_{a,X} \to 0$$

(le premier gradué du lemme de Poincaré). Si $X = \mathbf{A}^1_C$, $f \mapsto f dT$ donne un isomorphisme $\mathcal{O}_X \simeq \Omega^1_X$. On a donc que l'extension correspondant à dT est $\mathrm{gr}^1\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$.

Or, comme les flèches du lemme de Poincaré sont strictes exactes, on a une suite exacte

$$0 \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^2 \to \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^2 \to \mathrm{gr}^0\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \Omega^1$$

qui donne un isomorphisme $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^2 \simeq \mathrm{gr}^1\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$.

4.3. Le cas $G = \mathbf{Q}_p$ et $G' = \mathbf{Q}_p$ ou $G' = \mathbf{G}_a$. — Notons tout d'abord que le groupe $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{Q}_p, G')$ s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to R^1\varprojlim_{\times p} \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathbf{Z}_p, G') \to \mathrm{Ext}^i(\mathbf{Q}_p, G') \to \varprojlim_{\times p} \mathrm{Ext}^i(\mathbf{Z}_p, G') \to 0.$$

Notons

$$X = \mathrm{Spa}(\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C), \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_C)).$$

Cet espace adique représente le faisceau pro-étale $\mathbf{Z}_p$.

Proposition 4.3. — *Pour tout $n \geq 1$, on a $H^0(X^n, \mathbf{Q}_p) = \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^n, \mathbf{Q}_p)$ et $H^i(X^n, \mathbf{Q}_p) = 0$ pour tout $i > 0$. On a $H^0(X^n, \mathbf{G}_a) = \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^n, C)$ et $H^i(X^n, \mathbf{G}_a) = 0$ si $i > 0$.*

Démonstration. — Soit $i \geq 1$ et $k \geq 0$. Comme X^n est profini sur C (donc strictement totalement discontinu), $H^i(X^n, \mathbf{Z}/p^k) = H^i_{\text{ét}}(X^n, \mathbf{Z}/p^k) = 0$. On en déduit avec la suite exacte

$$0 \to R^1 \varprojlim H^{i-1}(X^n, \mathbf{Z}/p^k) \to H^i(X^n, \mathbf{Z}_p) \to \varprojlim H^i(X^n, \mathbf{Z}/p^k) \to 0$$

que $H^i(X^n, \mathbf{Z}_p) = 0$ pour tout $i \geq 1$ (pour $i = 1$, on vérifie à la main que $R^1 \varprojlim$ s'annule). Comme $H^i(X^n \mathbf{Q}_p) = H^i(X^n, \mathbf{Z}_p)[1/p]$ par quasi-compacité de X^n, on a le résultat. La deuxième phrase est une conséquence du fait que

$$X^n = \mathrm{Spa}(\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^n, C), \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^n, \mathcal{O}_C))$$

est affinoïde perfectoïde, cf. [**37**, Th. 6.5 (ii)]. □

Supposons d'abord $G' = \mathbf{G}_a$. Considérons le complexe

$$C \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C) \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C) \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^3, C) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C)$$
$$\to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^4, C) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^3, C)^2 \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C),$$

la première flèche étant $a \mapsto (x \mapsto ax)$ et les flèches suivantes étant les flèches évidentes déduites de la définition du complexe C. On va montrer que ce complexe est exact.

Si f est dans le noyau de la premère flèche, f est un multiple scalaire de l'identité sur $\mathbf{Z}$ donc sur $\mathbf{Z}_p$ par densité. Par conséquent, $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{G}_a) = C$. Vérifions l'exactitude en $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C)$: comme $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C) = \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C) \widehat{\otimes} \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, C)$ (puisque $\mathbf{Z}_p$ est compact), les fonctions $(x, y) \mapsto \binom{x}{k}\binom{y}{l}$, avec $k, l \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C)$ (développement de Mahler d'une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$). Soit $f = \sum_{k,l \geq 0} a_{k,l}\binom{x}{k}\binom{y}{l}$, avec $a_{k,l} \to 0$ quand $k + l \to 0$, vérifiant

$$f(x+y, z) - f(y, z) - f(x, y+z) + f(x, y) = 0 \quad ; \quad f(x, y) - f(y, x) = 0.$$

A l'aide de ces deux égalités et de la relation $\binom{x+y}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{x}{j}\binom{y}{k-j}$, on obtient immédiatement que $a_{k,l}$ ne dépend que de la somme $k + l$ si $k, l > 0$, et que $a_{k,0} = a_{0,l} = 0$ si $k, l > 0$. Posons alors $b_n = a_{k,l}$ si $n > 1$ avec k, l non nuls tels que $k + l = n$, $b_0 = a_{0,0}$ et b_1 quelconque. On vérifie que

$$f(x, y) = g(x + y) - g(x) - g(y),$$

avec $g(x) = \sum_n b_n \binom{x}{n}$. Notons que si l'on écrit plutôt f sous la forme $f = \sum_{k,l \geq 0} a'_{k,l} k!\binom{x}{k} l!\binom{y}{l}$, sans se préocupper du comportement asymptotique des coefficients, comme $k!\binom{x+y}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j!\binom{x}{j}(k-j)!\binom{y}{k-j}$, les relations obtenues sur les coefficients $a'_{k,l}$ sont exactement les mêmes que celles obtenues ci-dessus dans le calcul de $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$. Cette observation permet de montrer aussi l'exactitude en $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^3, C) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, C)$: il suffit de reprendre le même calcul que celui montrant l'annulation de $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ ci-dessus (la convergence ne pose pas de problème).

Si $G' = \mathbf{Q}_p$, il faut considérer le complexe

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_p \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p) \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, \mathbf{Q}_p) \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^3, \mathbf{Q}_p) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, \mathbf{Q}_p)\\ \to \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^4, \mathbf{Q}_p) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^3, \mathbf{Q}_p)^2 \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p^2, \mathbf{Q}_p) \oplus \mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p),\end{aligned}$$

avec les mêmes flèches que ci-dessus, dont on montre exactement de la même manière qu'il est exact.

5. Faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine

5.1. Rappels sur la courbe de Fargues-Fontaine. — On fixe une extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ d'uniformisante π et de corps résiduel $\mathbf{F}_q$. Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde de caractéristique p. On définit l'espace

$$Y_{S,E} = \mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(R^\circ), W_{\mathcal{O}_E}(R^+)) \backslash V(\pi[\varpi]),$$

ϖ étant une pseudo-uniformisante (élément inversible topologiquement nilpotent) de R. Il s'agit d'un espace adique (i.e. le préfaisceau structural est un faisceau), qui est l'analogue en caractéristique mixte du disque unité ouvert épointé sur la base S, si l'on pense aux vecteurs de Witt comme à des « fonctions holomorphes de la variable π ». On peut écrire

$$Y_{S,E} = \bigcup_{n,m\geq 1} Y_{S,E,n,m} = \bigcup_{n,m\geq 1} \mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(R^\circ)\langle \frac{[\varpi]^n}{\pi}, \frac{\pi^m}{[\varpi]}\rangle, W_{\mathcal{O}_E}(R^+)\langle \frac{[\varpi]^n}{\pi}, \frac{\pi^m}{[\varpi]}\rangle).$$

L'espace $Y_{S,E}$ est muni d'un Frobenius φ qui agit sur les fonctions par

$$\varphi(\sum_n [x_n]\pi^n) = \sum_n [x_n^q]\pi^n.$$

L'anneau $\mathcal{O}(Y_{S,E})$ des fonctions sur $Y_{S,E}$ est le complété $B_E(R)$ de

$$B_E^b(R) := \left\{ \sum_{n\gg-\infty} [x_n]\pi^n, x_n \in R, (x_n) \text{ bornée} \right\} = W_{\mathcal{O}_E}(R^\circ)[1/\pi, 1/[\varpi]],$$

l'anneau des « fonctions méromorphes le long des diviseurs $\pi = 0$ et $[\varpi] = 0$ », relativement aux normes $\|.\|_\rho$, $0 < \rho < 1$, définies par

$$\| \sum_n [x_n]\pi^n \|_\rho = \sup_n \|x_n\|\rho^n,$$

$\|.\|$ étant une norme sur R multiplicative pour les puissances qui fait de R° la boule unité de R.

A l'intérieur de $B_E^b(R)$ vit

$$B_E^{b+}(R) = \left\{ \sum_{n\gg-\infty} [x_n]\pi^n, x_n \in R, \|x_n\| \leq 1 \right\} = W_{\mathcal{O}_E}(R^\circ)[1/\pi],$$

dont l'adhérence dans $B_E(R)$ est notée $B_E^+(R)$.

Si $f \in B_E(R)$, $\|\varphi(f)\|_\rho = \|f\|_{\rho^{1/q}}^q$. L'action de φ sur $Y_{S,E}$ est donc proprement discontinue et on peut passer au quotient. L'espace adique $X_{S,E} := Y_{S,E}/\varphi^{\mathbf{Z}}$ ainsi obtenu est *la courbe de Fargues-Fontaine relative sur S, pour le corps local E*. Si $E = \mathbf{Q}_{p^h}$ est l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$, on écrira $Y_{S,h}$ et $X_{S,h}$ au lieu de $Y_{S,E}$ et $X_{S,E}$; si $h = 1$ on oubliera carrément l'indice 1.

Remarque 5.1. — Les anneaux $B_E(R)$ et $B_E^+(R)$ sont étudiés en détail dans **[24]** lorsque $R = C^\flat$ et dans **[37]** dans le cas général, avec des notations différentes : l'anneau $B(R)$ (resp. $B^+(R)$) y est noté $\tilde{\mathcal{R}}_R$ (resp. $\tilde{\mathcal{R}}_R^+$).

Si $S = \mathrm{Spa}(C^\flat)$, on notera simplement Y_E et X_E au lieu de $Y_{S,E}$ et $X_{S,E}$ (par exemple, en accord avec la convention précédente, X désigne la courbe associée au choix $S = \mathrm{Spa}(C^\flat)$ et $E = \mathbf{Q}_p$). Il s'agit alors de la courbe de Fargues-Fontaine originale, étudiée en détail dans [**24**]. La courbe adique X_E admet un pendant schématique $X_E^{\mathrm{sch}} := \mathrm{Proj}(P_E)$, où P_E est l'algèbre graduée :

$$P_E = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{O}(Y_E)^{\varphi = \pi^d} = \bigoplus_{d \geq 0} B_E^{\varphi = \pi^d}$$

(on a noté $B_E = B_E(C)$). Le schéma X_E^{sch} est régulier noethérien de dimension 1 sur E, mais très loin d'être de type fini : le corps résiduel de X_E^{sch} en un point fermé x est un corps perfectoïde de caractéristique 0 dont le basculé est isomorphe à $C^\flat$, donc en particulier de dimension infinie sur E ! Toutefois, tout se passe comme si X_E était la courbe adique associée à X_E^{sch}. En particulier, on a une équivalence de type GAGA entre faisceaux cohérents sur X_E et sur X_E^{sch} ([**37**, Th. 8.7.7]). En outre, bien que X_E^{sch} ne soit pas de type fini, Fargues et Fontaine prouvent que X_E est une courbe *complète*, au sens où si $f \in E(X_E^{\mathrm{sch}})$,

$$\sum_{x \in |X_E^{\mathrm{sch}}|} v_x(f) = 0$$

(v_x est la valuation sur l'anneau local de X_E^{sch} en le point fermé x, qui est un anneau de valuation discrète puisque X_E^{sch} est régulier de dimension 1). Cela permet de définir le degré d'un fibré en droites et, en utilisant le déterminant, le *degré* d'un fibré de rang quelconque sur X_E^{sch}. Si l'on définit la *pente* d'un fibré vectoriel comme le quotient de son degré par son rang, tout fibré $\mathcal{F}$ sur X_E^{sch} admet une unique filtration croissante (la *filtration de Harder-Narasimhan*)

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F},$$

telle que chaque $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ soit semi-stable de pente μ_{i+1} (tout sous-fibré est de pente $\leq \mu_{i+1}$) avec $\mu_1 > \cdots > \mu_n$. Si l'on décrète en outre qu'un faisceau cohérent de torsion est de pente $+\infty$, le formalisme de Harder-Narasimhan s'étend aux faisceaux cohérents sur X_E^{sch}, puisque, X_E^{sch} étant régulier de dimension 1, tout faisceau cohérent sur X_E^{sch} est somme d'un fibré et d'un faisceau de torsion. Ces résultats se tranposent via l'équivalence GAGA à X_E.

Soit (D, φ) un isocristal sur l'extension non ramifiée maximale $\breve{E}$ de E. On peut associer à (D, φ) un fibré vectoriel sur X_E, noté $\mathcal{E}(D)$, dont la réalisation géométrique est le quotient $Y \times_\varphi D$, φ agissant diagonalement. Le théorème GAGA pour la courbe donne un fibré vectoriel $\mathcal{E}(D)^{\mathrm{sch}}$ sur X_E^{sch} qui est en fait le faisceau quasi-cohérent associé au P_E-module gradué

$$\bigoplus_{d \geq 0} (B_E \otimes_{\breve{E}} D)^{\varphi = \pi^d}$$

(qui est donc en fait un fibré). La catégorie $\varphi - \mathrm{Mod}_{\breve{E}}$ des isocristaux sur $\breve{E}$ est semi-simple, avec pour chaque rationnel λ un unique objet simple de pente λ. On a donc pour chaque $\lambda \in \mathbf{Q}$ un fibré $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$ sur X_E défini comme l'image par $\mathcal{E}$ de l'unique isocristal simple de pente $-\lambda$. C'est le fibré associé au diviseur $\lambda.\infty$ si λ est entier. Pour tout λ, $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$ est de pente λ [25]. Dans la suite de ce texte, nous nous intéresserons aux fibrés sur X mais le fait suivant est utile pour les arguments : si $\lambda = d/h$, le fibré de rang h $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est le poussé en avant du fibré en droites $\mathcal{O}_{X_h}(d)$ sur X_h.

Le théorème principal de [**24**] concernant les fibrés sur X_E (ou X_E^{sch}) est le suivant.

Théorème 5.2. — *Le foncteur $\mathcal{E} : D \mapsto \mathcal{E}(D)$ de $\varphi - \mathrm{Mod}_{\breve{E}}$ vers la catégorie des fibrés vectoriels sur X_E est essentiellement surjectif. En d'autres termes, tout fibré sur la courbe*

25. Ce qui explique la convention de signe.

se décompose (non canoniquement) comme somme de fibrés $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{Q}$, et les λ qui apparaissent sont uniquement déterminés à permutation près.

Remarque 5.3. — a) En particulier, la filtration de Harder-Narasimhan des faisceaux cohérents sur X est (non canoniquement) scindée. Cela se traduit par le fait que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = \bigoplus H^1(X, \mathcal{O}_X(\mu - \lambda)) = 0$ si $\lambda \leq \mu$. Les objets semi-stables de pente λ sont somme directe de copies de l'unique objet stable de pente λ, $\mathcal{O}(\lambda)$.

b) Le foncteur $\mathcal{E}$ est très loin d'être pleinement fidèle. A titre d'exemple, le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1)) = B^{\varphi=p}$ est de dimension infinie, alors que le groupe correspondant dans la catégorie des isocristaux est nul.

5.2. Paires de torsion et coeurs abéliens. — Commençons par une définition générale.

Définition 5.4. — Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une *paire de torsion* de $\mathcal{A}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{A}$, telles que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T') = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $T' \in \mathcal{T}'$ et telles que pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, il existe une suite exacte

$$0 \to T \to A \to T' \to 0$$

avec $T \in \mathcal{T}$ et $T' \in \mathcal{T}'$.

Soit D la catégorie dérivée bornée de $\mathcal{A}$. On suppose que l'on s'est donné une paire de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$. Le fait suivant est standard (voir, par exemple, [**34**, Ch. 1]).

Proposition 5.5. — *Soit $k \in \mathbf{Z}$. La sous-catégorie pleine*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',k} := \{A \in D, H^i(A) = 0 \text{ pour } i \neq k-1, k\ ;\ H^{k-1}(A) \in \mathcal{T}', H^k(A) \in \mathcal{T}\}$$

est un coeur de D.

En d'autres termes, il existe une t-structure bornée sur D dont le coeur est $\mathcal{A}_{\mathcal{T},\mathcal{T}',k}$.

L'exemple fondamental sera pour nous le suivant. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne munie de deux fonctions rang et degré, telle que les objets de $\mathcal{A}$ admettent une filtration de Harder-Narasimhan relativement à la fonction pente associée. Si $m \in \mathbf{R}$, on note $\mathcal{T}_m^-$ (resp. $\mathcal{T}_m'^-$) comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets dont tous les quotients de la filtration de Harder-Narasimhan sont de pente $\geq m$ (resp. $< m$). C'est une paire de torsion de la catégorie dérivée bornée de $\mathcal{A}$. On définit de même une paire de torsion $(\mathcal{T}_m^+, \mathcal{T}_m'^+)$ en remplaçant $\geq m$ par $> m$ et $< m$ par $\leq m$. Pour alléger les notations, on notera dans la suite :

$$\mathcal{A}^- := \mathcal{A}_{\mathcal{T}_0^-, \mathcal{T}_0'^-, 0} \quad ; \quad \mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_{\mathcal{T}_0^+, \mathcal{T}_0'^+, 1}.$$

Si l'on étend additivement à la catégorie dérivée les fonctions rang et degré, la catégorie $\mathcal{A}^-$ est munie de fonctions degré, rang et pente définies par

$$\deg^- = -\mathrm{rg} \quad ; \quad \mathrm{rg}^- = \deg \quad ; \quad \mu^- = -\mathrm{rg}/\deg$$

et ses objets admettent des filtrations de Harder-Narasimhan pour μ^-. Si $A \in \mathcal{A}^-$, le triangle exact

$$H^{-1}(A)[1] \to A \to H^0(A) \xrightarrow{+1}$$

donne une suite exacte dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}^-$

$$0 \to H^{-1}(A)[1] \to A \to H^0(A) \to 0.$$

Dans cette suite exacte, le terme de gauche correspond à la partie de pentes > 0 et le terme de droite à la partie de pentes ≤ 0 [26]. On a des formules analogues pour $\mathcal{A}^+$ en posant cette fois-ci $\deg^+ = \mathrm{rg}$ et $\mathrm{rg}^+ = -\deg$.

26. Noter que les objets de torsion sont de pente $-\infty$ dans la nouvelle catégorie.

Choisissons pour catégorie abélienne la catégorie Coh_X des faisceaux cohérents sur X. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_X^-$. Comme

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(H^0(\mathcal{F}), H^{-1}(\mathcal{F})[1]) &= \mathrm{Ext}^1_{D^b(\mathrm{Coh}_X)}(H^0(\mathcal{F}), H^{-1}(\mathcal{F})[1]) \\ &= \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X}(H^0(\mathcal{F}), H^{-1}(\mathcal{F})) = 0\end{aligned}$$

(car X est noethérien régulier de dimension 1), $\mathcal{F} \simeq H^{-1}(\mathcal{F})[1] \oplus H^0(\mathcal{F})$ (non canoniquement) ; on peut donc penser à un élément de $\mathrm{Coh}_X^{0,-}$ comme à un couple $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de faisceaux cohérents sur X, avec $\mathcal{F}'$ à pentes strictement négatives, $\mathcal{F}''$ à pentes positives. De même, le fait que la filtration de Harder-Narasimhan soit scindée permet de voir un faisceau cohérent sur X comme un couple de faisceaux $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ comme précédemment. Mais bien sûr les morphismes entre deux tels couples $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ et $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ dans les deux catégories sont différents. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}((\mathcal{F}', \mathcal{F}''), (\mathcal{G}', \mathcal{G}'')) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') & 0 \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}'') & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}'') \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}((\mathcal{F}', \mathcal{F}''), (\mathcal{G}', \mathcal{G}'')) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}') \\ 0 & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}'') \end{pmatrix}.$$

Si l'on étend additivement à la catégorie dérivée les fonctions rang et degré, la catégorie Coh_X^- est munie de fonctions degré, rang et pente définies par

$$\deg^{0,-} = -\mathrm{rg} \quad ; \quad \mathrm{rg}^{0,-} = \deg \quad ; \quad \mu^{0,-} = -\mathrm{rg}/\deg$$

et ses objets admettent des filtrations de Harder-Narasimhan pour $\mu^{0,-}$. Dans la suite exacte dans Coh_X^- :

$$0 \to H^{-1}(\mathcal{F})[1] \to \mathcal{F} \to H^0(\mathcal{F}) \to 0$$

le terme de gauche correspond à la partie de pentes > 0 et le terme de gauche à la partie de pentes ≤ 0 [27]. On a des formules analogues pour Coh_X^+ en posant cette fois-ci $\deg^+ = \mathrm{rg}$ et $\mathrm{rg}^+ = -\deg$. Cette observation permet de donner un sens à l'énoncé suivant.

Proposition 5.6. — *Les catégories abéliennes* Coh_X *et* $(\mathrm{Coh}_X^-)^+$ *sont naturellement équivalentes et via cette équivalence, les fonctons rang et degré se correspondent.*

Démonstration. — Par définition, Coh_X^- est une sous-catégorie de $D^b(\mathrm{Coh}_X)$, donc on a un foncteur exact ([**1**, Appendix])

$$D^b(\mathrm{Coh}_X^-) \to D^b(\mathrm{Coh}_X),$$

induisant le foncteur identité sur Coh_X^-, et donc un foncteur exact $\iota : (\mathrm{Coh}_X^-)^+ \to D^b(\mathrm{Coh}_X)$. Soit $\mathcal{F} \in (\mathrm{Coh}_X^-)^+$; on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''[-1]$, avec $\mathcal{F}' \in \mathrm{Coh}_X^-$ à pentes ≤ 0 et $\mathcal{F}'' \in \mathrm{Coh}_X^-$ à pentes > 0. On a donc $\mathcal{F}' \in \mathrm{Coh}_X$ à pentes ≥ 0 et $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'''[1]$, avec $\mathcal{F}''' \in \mathrm{Coh}_X$ à pentes < 0. Finalement, $\iota(\mathcal{F}) = \mathcal{F}''' \oplus \mathcal{F}'$. Ceci prouve que $\iota(\mathcal{F}) \in \mathrm{Coh}_X$ et aussi que ι est essentiellement surjectif.

Pour la pleine fidélité, on regarde

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Coh}_X^-)^+}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Coh}_X^-)^+}((\mathcal{F}', \mathcal{F}''), (\mathcal{G}', \mathcal{G}'')) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}') \\ 0 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}'') \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Or :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}'),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}'') = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Coh}_X)}(\mathcal{F}'''[1], \mathcal{G}'''[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}''', \mathcal{G}''')$$

27. Noter que les objets de torsion sont de pente $-\infty$ dans la nouvelle catégorie.

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}') = \mathrm{Ext}^1_{D^b(\mathrm{Coh}_X)}(\mathcal{F}'''[1], \mathcal{G}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}''', \mathcal{G}').$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Coh}_X^-)^+}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}''', \mathcal{G}') \\ 0 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{F}''', \mathcal{G}''') \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}((\mathcal{F}''', \mathcal{F}'), (\mathcal{G}''', \mathcal{G}')) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\iota(\mathcal{F}), \iota(\mathcal{G})).\end{aligned}$$

Enfin, le fait que les fonctions rang et degré se correspondent via cette équivalence est facile. □

Remarques 5.7. — a) Cela entraîne en particulier que $D^b(\mathrm{Coh}_X^-) = D^b(\mathrm{Coh}_X)$.

b) On a exploité le fait que la filtration de Harder-Narasimhan des faisceaux cohérents sur X était scindée. Pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ avec un formalisme de Harder-Narasimhan comme ci-dessus, on peut vérifier qu'on a toujours que l'image de $(\mathcal{A}^-)^+$ par ι tombe dans $\mathcal{A}$, mais ces catégories n'ont pas de raison d'être équivalentes.

6. Une description alternative de la catégorie Coh_X^-

6.1. Algèbres sympathiques. — Les algèbres sympathiques ont été introduites par Colmez pour définir les espaces de Banach-Colmez.

Définition 6.1. — Une C-algèbre de Banach R est dite *sympathique* si elle est uniforme (ce qui signifie que R° est borné, ou, de façon équivalente, qu'il existe sur R une norme multiplicative pour les puissances induisant la topologie de R) et *p-close* : tout élément de $1 + R^{\circ\circ}$ admet une racine p-ème.

Remarque 6.2. — Une algèbre de Banach R est uniforme si et seulement si la norme qui définit sa topologie est équivalente à la semi-norme spectrale de R ([**37**, Def. 2.8.1]). La définition précédente est donc la même que celle de Colmez ([**12**, §4]), la condition de connexité – qui n'est pas essentielle – mise à part.

Proposition 6.3. — *Une algèbre sympathique est perfectoïde. Pour toute C-algèbre perfectoïde R, il existe une R-algèbre sympathique pro-finie-étale. En particulier, les spectres affinoïdes d'algèbres sympathiques forment une base de la topologie du site* $\mathrm{Perf}_{C,\mathrm{proét}}$.

Démonstration. — Pour la preuve, voir [**12**, Lemme 1.15 (iii)] et [**12**, Prop. 4.20 (i)]. □

Exemples 6.4. — a) Le corps C est sympathique.

b) La C-algèbre $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ (obtenue en complétant p-adiquement $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{O}_C[T^{1/p^n}]$ puis en inversant p) n'est pas sympathique, bien qu'elle soit perfectoïde. En effet, soit $a \in \mathcal{O}_C$, avec $|p| < |a|$. Alors

$$y_a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/p}{k} a^k T^k$$

est une racine p-ème de $1 + aT$ dans $C[\![T^{1/p^\infty}]\!]$, qui contient $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$. Si $1 + aT$ avait une racine p-ème dans $C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$, y_a serait dans $\mathcal{O}_C\langle T^{1/p^\infty}\rangle$: c'est absurde, puisque par choix de a le coefficient de T n'est pas dans $\mathcal{O}_C$.

Proposition 6.5. — *Une C-algèbre de Banach uniforme R est sympathique si et seulement si l'application logarithme* $\log : 1 + R^{\circ\circ} \to R$ *est surjective.*

Démonstration. — Supposons R sympathique. Soit $x \in R$. On choisit n assez grand pour que $p^n x$ soit dans l'image de log (ce qui est possible, puisque l'exponentielle converge sur un voisinage de 0 et y définit un inverse du logarithme). On a donc $p^n x = \exp(y')$, et comme $y' \in 1 + R^{\circ\circ}$, il existe par hypothèse $y \in 1 + R^{\circ\circ}$ tel que $y^{p^n} = y'$, i.e. tel que $\exp(y) = x$.

Réciproquement, soit $y \in 1 + R^{\circ\circ}$. Il existe $y' \in 1 + R^{\circ\circ}$ tel que $\log(y') = p^{-1}x$ et donc $\log(y'^{-p}y) = 0$. Donc $y'^{-p}y \in \mu_{p^\infty}$ et y admet donc une racine p-ème. □

Remarque 6.6. — Soit $h \geq 1$ et $d \in \mathbf{Z}$. On montre ([**37**, Cor. 5.2.12]) que

$$B(R)^{\varphi^h = p^d} = B^+(R)^{\varphi^h = p^d}$$

et comme $B^+(R) = \cap_{n \geq 0} \varphi^n(B^+_{\mathrm{cris}}(R))$, c'est aussi la même chose que $B^+_{\mathrm{cris}}(R)^{\varphi^h = p^d}$. Ainsi dans la définition du corollaire 2.23, on aurait aussi bien pu définir $\mathbf{U}_\lambda$ avec l'anneau $B(R)$.

Corollaire 6.7. — *Une C-algèbre de Banach uniforme R est sympathique si et seulement si l'application $\theta : B(R^\flat)^{\varphi = p} \to R$ de Fontaine est surjective.*

Démonstration. — En effet comme on l'a observé dans la section 2.3, la théorie des groupes p-divisibles [28] permet d'identifier

$$\theta : B(R^\flat)^{\varphi = p} \to R$$

et

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} 1 + R^{\circ\circ} \to R, \ (x_n) \mapsto \log(x_0).$$

En outre, l'argument de la preuve précédente montre que R est sympathique si et seulement la deuxième application est surjective. □

6.2. La catégorie Coh^-_X comme catégorie de faisceaux « pervers cohérents » (au sens de [11]). — Soit S un espace perfectoïde sur $C^\flat$. On peut penser en première approximation à l'espace adique X_S comme à une famille $(X_{k(s)})$ de courbes de Fargues-Fontaine usuelles, indexée par les points géométriques de S. Néanmoins il faut prendre garde au fait qu'il n'y a pas de morphisme naturel d'espaces adiques $X_S \to S$! En caractéristique p cela vient du fait qu'on a quotienté par φ ; en caractéristique mixte, c'est encore pire, il n'y a même pas de tel morphisme au niveau de Y_S. Toutefois, bien que X_S ne vive pas au dessus de S, la construction de X_S est fonctorielle en S. On vérifie de plus (en étendant les scalaires à $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ et en basculant en caractéristique p) que si $f : S \to S'$ est un morphisme pro-étale (resp. surjectif), le morphisme induit $X_S \to X_{S'}$ est pro-étale (resp. surjectif). De plus, f commute aux limites projectives finies.

En d'autres termes, on a un morphisme de topos τ du topos associé au gros site pro-étale de X vers le topos $(\mathrm{Perf}_{C^\flat,\mathrm{proét}})^\sim$. En particulier, si $\mathcal{F}$ est un complexe de faisceaux cohérents sur X, on peut lui associer un complexe de faisceaux $R\tau_*\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Perf}_{C^\flat,\mathrm{proét}}$.

Proposition 6.8. — *Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_X$. Alors :*
- *Si tous les quotients de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}$ sont à pentes ≥ 0, $R^i\tau_*\mathcal{F} = 0$ pour tout $i \neq 0$.*
- *Si tous les quotients de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}$ sont à pentes < 0, $R^i\tau_*\mathcal{F} = 0$ pour tout $i \neq 1$.*

Démonstration. — Le théorème de classification des fibrés montre qu'il suffit de vérifier que :
- $R^i\tau_*\mathcal{O}_X(\lambda) = 0$ pour tout $i \neq 0$, si $\lambda \geq 0$;
- $R^i\tau_*\mathcal{O}_X(\lambda) = 0$ pour tout $i \neq 1$, si $\lambda < 0$;
- $R^i\tau_*\iota_{x,*}B^+_{\mathrm{dR}}(C_x)/t^k B^+_{\mathrm{dR}}(C_x) = 0$ pour tout $i \neq 0$, si x est un point fermé de X, C_x le corps résiduel de X en x et $k > 0$.

28. Entre autres possibilités...

Rappelons que $R^i\tau_*\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau $S \mapsto H^i(X_S, \mathcal{F}_S)$. On peut donc supposer $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde perfectoïde.

Vérifions d'abord le troisième point. Le corps C_x est un corps perfectoïde de basculé $C^\flat$ et donne naissance à un débasculement $S^\sharp$ de S au-dessus de C_x par l'équivalence de Scholze entre espaces perfectoïdes sur C_x et sur $C^\flat$, et à un morphisme $\iota : S^\sharp \to X_S$ (par produit fibré de ι et $X_S \to X$, puisque $\mathrm{Hom}(S^\sharp, X) = \mathrm{Hom}(S, C^\flat)$). On a

$$H^i(X_S, \iota_*\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},S^\sharp}/t^k\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},S^\sharp}) = H^i(S^\sharp, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},S^\sharp}/t^k\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},S^\sharp})$$

qui est nul si $i > 0$ car $S^\sharp$ est affinoïde perfectoïde ([**50**, Th. 6.5 (ii)]).

Traitons maintenant le cas des fibrés $\mathcal{O}_{X_S}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{Q}$. Si $i = 0$, il s'agit de calculer $B(R)^{\varphi^h = p^d}$ si $\lambda = d/h$. On a pour tout $f \in B(R)$:

$$\|\varphi(f)\|_\rho = \|f\|^p_{\rho^{1/p}}.$$

Donc si $\varphi^h(f) = p^d f$, on a par une récurrence immédiate que pour tout $k \geq 1$

$$\|f\|_{\rho^{p^{kh}}} = \rho^{-dp^{kh}}\|f\|^{p^{kh}}_\rho.$$

Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer $\|f\|_\rho < 1$. On en déduit que si $d \leq 0$, le membre de droite tend vers 0, et donc

$$\lim_{\rho\to 0}\|f\|_\rho = 0.$$

Donc f a une singularité éliminable en 0 (la preuve de [**24**, Prop. 1.9.1] s'adapte sans problème au cas d'une algèbre perfectoïde R) et donc $f \in W(R)$ (pour le voir, on se ramène au cas connu des corps : cf. [**37**, Lem. 5.2.5]). Or on voit directement que $W(R)^{\varphi^h = p^d}$ est nul dès que $d \neq 0$ et vaut $W(R^{\varphi=1}) = \mathbf{Q}_p^{\pi_0(S)}$ si $d = 0$. Par conséquent, on a bien $R^0\tau_*\mathcal{O}_X(\lambda) = 0$ si $\lambda < 0$. On a aussi obtenu au passage que $R^0\tau_*\mathcal{O}_X = \mathbf{Q}_p$.

Pour comprendre ce qui se passe en degré $i > 0$, notons pour commencer qu'on peut supposer $\lambda = d$ entier, quitte à remplacer X par X_h, $h \geq 1$. En effet, si $\lambda = d/h$, $\mathcal{O}_X(\lambda) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)$, avec $\pi_h : X_h \to X$ étale et donc

$$H^i(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(\lambda)) = H^i(X_h, \mathcal{O}_{X_{S,h}}(\lambda)).$$

Si $\pi : Y_S \to X_S$ est la surjection canonique, $\pi^*\mathcal{O}_{X_S}(d) = \mathcal{O}_{Y_S}$ par définition de $\mathcal{O}_X(d)$. Pour tout $i > 0$, $H^i(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S})$ est nul. En effet, on peut écrire $Y_S = \cup_{n,m} Y_{S,n,m}$ comme ci-dessus et $H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) = \varprojlim H^0(Y_{S,n,m}, \mathcal{O}_{Y_S})$, les morphismes de transition étant continus et d'image dense. On a donc une suite exacte pour tout $i > 0$:

$$0 \to R^1\varprojlim H^{i-1}(Y_{S,n,m}, \mathcal{O}_{Y_S}) \to H^i(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \to \varprojlim H^i(Y_{S,n,m}, \mathcal{O}_{Y_S}) \to 0.$$

Or chaque $Y_{S,n,m}$ est affinoïde perfectoïde et donc le terme de droite est nul pour $i > 0$ ([**37**, Lemma 9.2.8]). Cela donne l'annulation cherchée pour $i > 1$. Pour $i = 1$, on utilise que de plus

$$R^1\varprojlim H^0(Y_{S,n,m}, \mathcal{O}_{Y_S}) = 0,$$

d'après la proposition 3.5. De la suite spectrale de Hochschild-Serre pour $\pi : Y_S \to X_S$ on déduit que

$$H^i(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(d)) = 0$$

si $i > 1$ et que

$$\begin{aligned} H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(d)) &= \mathrm{coker}(H^0(Y_S, \pi^*\mathcal{O}_{X_S}(d)) \xrightarrow{\mathrm{Id}-\varphi} H^0(Y_S, \pi^*\mathcal{O}_{X_S}(d))) \\ &= \mathrm{coker}(B(R) \xrightarrow{\mathrm{Id}-p^{-d}\varphi} B(R)), \end{aligned}$$

Or ce dernier groupe est nul si $d > 0$, d'après [**37**, Prop. 6.2.2].

Il ne reste donc plus à étudier que le cas $i = 1$, $\lambda = 0$, qui est plus délicat. Comme la question est locale pour la topologie pro-étale, on peut supposer $S = \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat +})$, avec R une C-algèbre sympathique (proposition 6.3). Regardons la suite exacte de fibrés

$$0 \to \mathcal{O}_{X_S} \to \mathcal{O}_{X_S}(1) \to i_{\infty,*}\mathcal{O}_{S^\sharp} \to 0.$$

(avec $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R, R^+)$) et prenons la suite exacte longue de cohomologie qui s'en déduit en appliquant $\Gamma(X_S, \cdot)$. On voit qu'il suffit de montrer que la flèche

$$H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1)) \to H^0(X_S, i_{\infty,*}\mathcal{O}_{S^\sharp})$$

est surjective pour avoir que $H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}) = 0$, puisque l'on sait déjà que $H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1)) = 0$. Mais cette flèche n'est autre que $\theta : B(R^\flat)^{\varphi = p} \to R$. Le corollaire 6.7 permet de conclure que $R^1\tau_*\mathcal{O}_X = 0$. $\square$

Remarque 6.9. — La preuve montre que $R^0\tau_*\mathcal{O}_X = \mathbf{Q}_p$. Si $\lambda = d/h > 0$, $R^0\tau_*\mathcal{O}_X(\lambda) = \mathbf{U}_\lambda$ qui est non nul. Si $\lambda = d/h < 0$, $R^1\tau_*\mathcal{O}_X(\lambda) \neq 0$: cela se vérifie aisément à l'aide des calculs précédents et de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{X_E}(d) \to \mathcal{O}_{X_E} \to \iota_{\infty,*}B_{\mathrm{dR}}^+/t^d B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0,$$

où $E = \mathbf{Q}_{p^h}$.

De la proposition et de la remarque précédentes, on déduit le

Corollaire 6.10. — *La catégorie* Coh_X^- *est exactement la sous-catégorie pleine de* $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ *suivante*

$$\left\{\mathcal{F}, H^i(\mathcal{F}) = 0 \text{ si } i \neq 0, -1,\ R^1\tau_* H^0(\mathcal{F}) = 0, R^0\tau_* H^{-1}(\mathcal{F}) = 0\right\}.$$

Autrement dit, le foncteur $R^0\tau_*$ *restreint à la catégorie* Coh_X^- *est exact.*

7. La catégorie $\mathcal{BC}$ en termes de la courbe

7.1. La catégorie $\mathcal{BC}$ comme coeur abélien de $D^b(\mathrm{Coh}_X)$. — On vient de voir que le foncteur $R^0\tau_*$ de Coh_X^- dans la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ était exact. On va voir maintenant qu'on a en fait beaucoup mieux. Le théorème 2.7 de Scholze permet d'identifier les sites $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ et $\mathrm{Perf}_{C^\flat,\text{proét}}$, ce que l'on fait désormais, en particulier dans l'énoncé suivant, qui est le résultat principal de ce texte.

Théorème 7.1. — *Le foncteur* $R^0\tau_*$ *réalise une équivalence de catégories entre* Coh_X^- *et* $\mathcal{BC}$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que l'image de Coh_X^- par $R^0\tau_*$ tombe dans $\mathcal{BC}$. Le groupe de Grothendieck $K_0(\mathrm{Coh}_X^-)$ est isomorphe à $K_0(\mathrm{Coh}_X)$ via la flèche $[\mathcal{F}] \mapsto [H^0(\mathcal{F})] - [H^{-1}(\mathcal{F})]$. Or

$$K_0(\mathrm{Coh}_X) \simeq K_0(\mathrm{Fib}_X) \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{O}_X] \oplus \mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{O}_X] \oplus \mathbf{Z}[\mathcal{O}_X(1)].$$

Comme la catégorie $\mathcal{BC}$ est par définition abélienne et stable par extensions, il suffit donc de vérifier que $R^0\tau_*\mathcal{O}_X, R^0\tau_*\mathcal{O}_X(1) \in \mathcal{BC}$. Or on a $R^0\tau_*\mathcal{O}_X(1) = \mathbf{U}_1$ et $R^0\tau_*\mathcal{O}_X = \mathbf{Q}_p$ comme on l'a vu au cours de la preuve de la proposition 6.8.

Soit $\tilde{\mathcal{BC}}$ la catégorie définie de façon analogue à $\mathcal{BC}$ en remplaçant faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels par faisceaux de groupes abéliens. La catégorie $\mathcal{BC}$ est une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{BC}}$. Pour prouver le théorème, on va montrer que $R^0\tau_*$ induit une équivalence entre Coh_X^- et $\tilde{\mathcal{BC}}$. Observons alors que si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X^-$, tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ induit par $R^0\tau_*$ un morphisme $\mathbf{Q}_p$-linéaire entre les faisceaux de $\mathbf{Q}_p$-vectoriels $R^0\tau_*(\mathcal{F})$ et $R^0\tau_*(\mathcal{G})$. On en déduit donc que les trois catégories Coh_X^-, $\mathcal{BC}$ et $\tilde{\mathcal{BC}}$ sont nécessairement équivalentes.

L'exactitude du foncteur $R^0\tau_* : \mathrm{Coh}_X^- \to \tilde{\mathcal{BC}}$ donne une flèche pour tout $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X^-$ et tout $i \geq 0$

$$(*)_{i,\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G}).$$

Par définition de $\tilde{\mathcal{BC}}$ comme plus petite-sous catégorie abélienne stable par extensions de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $\mathrm{Perf}_{C,\text{proét}}$ contenant les $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie et les C-Espaces Vectoriels de dimension finie, il s'agit donc pour démontrer le théorème de prouver que la flèche ci-dessus est un isomorphisme pour $i = 0, 1$ et pour tout $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X^-$.

Proposition 7.2. — *On suppose que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie ou des C-Espaces Vectoriels de dimension finie. Alors $(*)_{i,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ est un isomorphisme pour $i = 0, 1, 2$.*

Démonstration. — C'est un corollaire des résultats de la section 4 et du calcul des Ext^i entre faisceaux cohérents sur la courbe. □

Montrons pour commencer que l'énoncé de la proposition 7.2 reste valable lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont à pentes entre 0 et 1, i.e. que $(*)_{i,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ est un isomorphisme lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont à pentes entre 0 et 1 et $i = 0, 1, 2$. Il existe alors V, V' deux $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, W, W' deux C-espaces vectoriels de dimension finie et des suites exactes

$$0 \to V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to i_{\infty,*}W \to 0 \quad ; \quad 0 \to V' \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{G} \to i_{\infty,*}W' \to 0.$$

D'où des suite exactes

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}W, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}W, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}W, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \\ \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}W, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}W, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}).$$

Ce dernier groupe est nul dans les deux catégories considérées, puisque $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, V' \otimes \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(VV')$) et $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, i_{\infty,*}W')$ (resp. $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(V, W' \otimes \mathbf{G}_a)$) le sont, d'après le théorème 4.1. On peut donc supposer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel ou un C-Espace Vectoriel de dimension finie. On écrit alors

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, i_{\infty,*}W') \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, i_{\infty,*}W') \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, i_{\infty,*}W') \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, i_{\infty,*}W') \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, i_{\infty,*}W').$$

Ce dernier groupe est nul dans les deux catégories considérées, d'après le théorème 4.1. Le résultat cherché se déduit donc de la proposition 7.2.

Pour prouver que $(*)_{i,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ est un isomorphisme pour $i = 0, 1$ dans le cas général, nous ferons usage du lemme suivant :

Lemme 7.3. — *On a les suites exactes suivantes dans* Coh_X^- *pour* $d > 1$ *et* $k > 0$ *:*

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1) \oplus \mathcal{O}_X(d-1) \to \mathcal{O}_X(d) \to 0, \tag{4}$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(k) \to i_{\infty,*}B_{\mathrm{dR}}^+/t^k B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0, \tag{5}$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to i_{\infty,*}B_{\mathrm{dR}}^+/t^k B_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathcal{O}_X(-k)[1] \to 0. \tag{6}$$

Démonstration. — Ces suites exactes se déduisent respectivement des suites exactes suivantes dans Coh_X^-, vues comme triangles exacts dans la catégorie dérivée :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1) \oplus \mathcal{O}_X(d-1) \to \mathcal{O}_X(d) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(k) \to i_{\infty,*}B_{\mathrm{dR}}^+/t^k B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-k) \to \mathcal{O}_X \to i_{\infty,*}B_{\mathrm{dR}}^+/t^k B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0.$$

Les deux dernières suites exactes, induites par la multiplication par un élément de $H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) = B^{\varphi=p^k}$ sont les mêmes à torsion près et la traduction géométrique de la « suite exacte fondamentale » en théorie de Hodge p-adique : cf [**24**, 8.2.1.3]. L'existence de la première suite exacte se démontre comme dans [**12**, 8.20]. □

On déduit du lemme que pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_X^-$, il existe une suite exacte *dans* Coh_X^-

$$0 \to V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0,$$

avec $\mathcal{F}'$ un fibré à pentes entre 0 et 1 et V un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit donc $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X^-$. On écrit

$$0 \to V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0 \quad ; \quad 0 \to V' \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to 0,$$

avec $\mathcal{F}', \mathcal{G}'$ à pentes entre 0 et 1, V, V' des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. On a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

On peut donc supposer, ce que l'on fera, $\mathcal{F}$ à pentes entre 0 et 1. On a des diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G}') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Coh}_X^-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}') \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G}') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*V' \otimes \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}-\mathrm{Sh}}(R^0\tau_*\mathcal{F}, R^0\tau_*\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que les flèches verticales du milieu $(*)_{0,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ et $(*)_{0,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ sont des isomorphismes ; grâce au lemme des cinq, il suffit de le vérifier pour les autres flèches verticales. Tous les fibrés qui apparaissent étant désormais à pentes entre 0 et 1, c'est gagné. □

Remarque 7.4. — Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux fibrés à pente entre 0 et 1, le fait que $(*)_{0,\mathcal{F},\mathcal{G}}$ est un isomorphisme peut aussi se démontrer à l'aide de la théorie des groupes p-divisibles. En effet, on peut supposer $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(\lambda)$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}_X(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Donnons-nous alors deux groupes p-divisibles G_λ, G_μ sur $\mathcal{O}_C$ de revêtements universels $\mathbf{U}_\lambda, \mathbf{U}_\mu$; on note $M(\lambda), M(\mu)$ les modules de Dieudonné sur $\breve{\mathbf{Q}}_p$ correspondants. D'une part on sait (cf. [**23**], Th. 7.18 et paragraphe après 7.27) que le foncteur de $\varphi-\mathrm{Mod}_{B^+_{\mathrm{cris}}}$ vers Bun_X est pleinement fidèle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}_X}(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris}},\varphi}(M(\lambda) \otimes_L B^+_{\mathrm{cris}}, M(\mu) \otimes_L B^+_{\mathrm{cris}}).$$

D'autre part on a vu dans la remarque 2.21 que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{U}_\lambda, \mathbf{U}_\mu) = \mathrm{Hom}(\tilde{G}^{\mathrm{ad}}_{\lambda,\eta}, \tilde{G}^{\mathrm{ad}}_{\mu,\eta}) = \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris}},\varphi}(M(\lambda) \otimes_L B^+_{\mathrm{cris}}, M(\mu) \otimes_L B^+_{\mathrm{cris}}),$$

ce qui conclut.

Remarque 7.5. — Les méthodes de cet article montreraient aussi que si E est un corps local de caractéristique p, la catégorie des E-espaces de Banach-Colmez (cf. remarque 2.12) est équivalente à la catégorie $\mathrm{Coh}^-_{X_E}$, où X_E désigne la courbe de Fargues-Fontaine pour le corps local E (et $F = C^\flat$). Le théorème 4.1 reste valable en remplaçant Perf_C par $\mathrm{Perf}_{C^\flat}$ et $\mathbf{Q}_p$ par E, à ceci près que $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$. En effet, le faisceau $\mathbf{G}_a$ est représenté par $\mathbf{A}^{1,\mathrm{perf}}_{C^\flat}$ et

$$\forall i > 0, \ H^i(\mathbf{A}^{1,\mathrm{perf}}_{C^\flat}, \mathbf{G}_a) = 0,$$

d'après [**50**, Lem. 4.10 (v)] (comparer avec le théorème 3.1).

Comme corollaire de la preuve du théorème, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 7.6. — *Les groupes* $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *et* $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *pour* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \{\mathbf{Q}_p, \mathbf{G}_a\}$ *sont les mêmes dans la catégorie des faisceaux pro-étales de groupes abéliens et dans celle des faisceaux pro-étales de* $\mathbf{Q}_p$*-espaces vectoriels.*

Remarque 7.7. — On pourrait certainement le prouver par des méthodes semblables à celles de la section 4 ; cela demanderait d'expliciter en bas degré les complexes qui apparaissent dans [**44**] et [**36**].

7.2. Lien avec la définition originale de Colmez. — Rappelons la définition originale de Colmez des espaces de Banach-Colmez, appelés par lui *Espaces de Banach de dimension finie* ([**12**]).

Pour Colmez, un *Espace de Banach* est un foncteur covariant de la catégorie des C-algèbres sympathiques dans la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach. Une suite d'Espaces de Banach est dite *exacte* si elle l'est quand on l'évalue sur toute algèbre sympathique. Un *Espace de Banach de dimension finie* est alors par définition un Espace de Banach obtenu par extension et quotient comme dans la définition des Banach-Colmez à partir des $\mathbf{Q}_p$-Espaces Vectoriels de dimension finie et des C-Espaces Vectoriels de dimension finie (que l'on voit ici par restriction comme foncteurs covariants sur la catégorie des C-algèbre sympathiques). Nous noterons $\mathcal{BC}'$ la catégorie des Espaces de Banach de dimension finie.

Commençons par une caractérisation des algèbres sympathiques.

Proposition 7.8. — *Soit* $S = \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat\circ})$*, avec* R *une* C*-algèbre perfectoïde. On a équivalence entre*

— R *est sympathique ;*

— $H^1(S, \mathbf{Q}_p) = 0$.

Démonstration. — Comme $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ pour tout affinoïde perfectoïde, l'équivalence des deux derniers points est immédiate. L'argument de la preuve de 6.8 montre que R est sympathique si et seulement si $H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}) = 0$. Par ailleurs on a remarqué au cours de la preuve de la proposition 6.8 que $\tau_* \mathcal{O}_X = \mathbf{Q}_p$ et $R^i \tau_* \mathcal{O}_X = 0$ pour $i > 0$ d'après la même proposition. Donc la suite spectrale de Leray pour τ donne pour tout $i \geq 0$ un isomorphisme

$$H^i(X_S, \mathcal{O}_{X_S}) = H^i(S, \mathbf{Q}_p),$$

ce qui donne l'équivalence des deux premiers points. □

Exemple 7.9. — Si K est un corps perfectoïde contenant C, K est sympathique si et seulement si $H^1(\mathcal{G}_K, \mathbf{Q}_p) = 0$ pour tout $i > 0$. La suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to W(\mathbf{G}_a^\flat) \stackrel{\wp := F-1}{\longrightarrow} W(\mathbf{G}_a^\flat) \to 0$$

montre que le corps perfectoïde K est sympathique si $\wp$ est surjectif sur $W(K^\flat)$. On montre de plus ([**39**, Prop. 3.10]) que $W(K^\flat)/\wp W(K^\flat)$ est isomorphe comme groupe topologique au complété p-adique de $\bigoplus_{\mathfrak{B}} \mathbf{Z}_p$, où $\mathfrak{B}$ est une base de $K^\flat/\wp K^\flat$ sur $\mathbf{F}_p$. Le corps perfectoïde K est donc sympathique si $\wp$ est surjectif sur $K^\flat$ (i.e. $H^1(\mathcal{G}_K, \mathbf{Z}_p)$ est nul ssi $H^1(\mathcal{G}_K, \mathbf{F}_p)$ est nul). Par exemple, tout corps dont le basculement est un corps valué parfait sphériquement complet contenant $C^\flat$ convient (en effet, soit L un corps parfait sphériquement complet et $a \in L$. Si $|a| > 1$, la série $\sum_{n<0} a^{p^n}$ converge car L est sphériquement complet vers une racine x de l'équation $\wp(x) = a$. Si $|a| \leq 1$, remplacer a par $a + b^p - b$, avec $|b| > 1$). Il existe donc en particulier des corps sympathiques qui ne sont pas algébriquement clos.

Corollaire 7.10. — *Si R et R' sont deux C-algèbres perfectoïdes telles que $R^\flat \simeq R'^\flat$, R est sympathique si et seulement si R' l'est.*

Démonstration. — C'est un corollaire immédiat de la proposition 7.8. □

Proposition 7.11. — *Les catégories $\mathcal{BC}$ et $\mathcal{BC}'$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que tout objet de $\mathcal{BC}$ s'écrit comme un quotient d'un espace de Banach-Colmez *effectif*, c'est-à-dire extension d'un C-Espace Vectoriel de dimension finie par un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie, par un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie. Cela se ramène en effet, grâce au théorème 7.1 à vérifier que tout faisceau cohérent sur la courbe s'écrit comme quotient d'un fibré à pentes entre 0 et 1 par un fibré semi-stable de pente 0. Or ceci est une conséquence immédiate de la classification et du lemme 7.3.

Montrons alors que le foncteur d'oubli qui à un objet de $\mathcal{BC}$ associe le foncteur sous-jacent sur la catégorie des C-algèbres sympathiques réalise une équivalence entre $\mathcal{BC}$ et $\mathcal{BC}'$. Le paragraphe précédent et la proposition 7.8 montrent que l'image par ce foncteur d'un espace de Banach-Colmez est bien un objet de $\mathcal{BC}'$ (29). La pleine fidélité est un corollaire du fait que les algèbres sympathiques forment une base de la topologie pro-étale (proposition 6.3). Enfin l'essentielle surjectivité découle du fait qu'on a a aussi dans $\mathcal{BC}'$:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{BC}'}(W \otimes \mathcal{O}, V) = \mathrm{Hom}_C(W, V \otimes C)$$

([**12**, Prop. 9.16]). □

On retrouve ainsi l'un des résultats principaux de [**12**].

Corollaire 7.12. — *La catégorie $\mathcal{BC}'$ est abélienne.*

En bonus, on a le

Corollaire 7.13. — *La catégorie abélienne $\mathcal{BC}$ ne dépend que de $C^\flat$.*

Corollaire 7.14. — *La catégorie $\mathcal{BC}$ permet de reconstruire la courbe de Fargues-Fontaine X^{sch}.*

29. Et explique au passage pourquoi la définition de Colmez des suites exactes d'Espaces de Banach était « raisonnable ».

Démonstration. — En effet, le théorème 7.1 et la proposition 5.6 permettent de reconstruire $\mathrm{Coh}_{X^{\mathrm{sch}}}$ à partir de $\mathcal{BC}$, puisqu'ils montrent que

$$\mathrm{Coh}_{X^{\mathrm{sch}}} \simeq \mathcal{BC}^+$$

(avec les notations du paragraphe 5.2). Or un théorème de Gabriel ([**30**, Ch VI, §3]) affirme qu'un schéma noethérien Z peut être reconstruit à partir de la catégorie abélienne Coh_Z de ses faisceaux cohérents, à équivalence près (Z s'identifie comme espace topologique à l'ensemble des sous-catégories de Serre irréductibles de Coh_Z avec pour ouverts les $D(\mathcal{I})$, ensemble des sous-catégories de Serre ne contenant pas une sous-catégorie de Serre $\mathcal{I}$ fixée ; le faisceau structural évalué sur l'ouvert $D(\mathcal{I})$ est le centre de la catégorie abélienne $\mathrm{Coh}_Z/\mathcal{I}$). □

Corollaire 7.15. — *Les espaces de Banach-Colmez sont des diamants sur* $\mathrm{Spa}(C)$.

Démonstration. — On vient de voir que tout espace de Banach-Colmez était le quotient par un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie (donc par une relation d'équivalence pro-étale) du revêtement universel d'un groupe p-divisible, qui est un espace perfectoïde. □

Question 7.16. — *Est-il vrai que les seuls objets représentables de $\mathcal{BC}$ sont ceux de $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$?*

Remarque 7.17. — Dans la question précédente, on a laissé de côté les C-Espaces Vectoriels de dimension finie, qui ne sont pas représentables par un espace *perfectoïde*. Si toutefois on se demande quels espaces de Banach-Colmez sont représentables par des espaces adiques sur C, on peut s'attendre à obtenir exactement les sommes directes d'un objet de $\mathcal{BC}^{\mathrm{rep}}$ et d'un C-Espace Vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire précisément les revêtements universels de *groupes analytiques rigides de type p-divisible* au sens de [**19**].

7.3. Le « drôle de corps » de Colmez. — Notons $\mathrm{Coh}_X^{\mathrm{tors}}$ la sous-catégorie de Coh_X formée des faisceaux de torsion, qui est la sous-catégorie de Serre des objets de rang $\mathrm{rg} = 0$. Le foncteur fibre générique identifie le quotient $\mathrm{Coh}_X/\mathrm{Coh}_X^{\mathrm{tors}}$ à la catégorie des $\mathrm{Frac}(B_e)$-espaces vectoriels ($B_e = B_{\mathrm{cris}}^+[1/t]$ et $\mathrm{Frac}(B_e)$ est le corps des fonctions de X). En particulier, cette catégorie est semi-simple avec un seul objet simple.

Si l'on fait la même manipulation avec Coh_X^-, i.e. si l'on quotiente par la sous-catégorie de Serre formée des objets de rang $\mathrm{rg}^- = 0$, qui est la sous-catégorie des fibrés semi-stables de pente 0 placés en degré 0, on obtient aussi une catégorie semi-simple avec un seul objet simple S à isomorphisme près : cela se déduit immédiatement des suites exactes du lemme 7.3. Par conséquent,

$$\mathscr{C} := \mathrm{End}_{\mathrm{Coh}_X^-/(\mathrm{Coh}_X^-)^{\mathrm{rg}^-=0}}(S)$$

est une algèbre à division.

Le théorème 7.1 identifie $\mathrm{Coh}_X^-/(\mathrm{Coh}_X^-)^{\mathrm{rg}^-=0}$ à $\mathcal{BC}/(\mathbf{Q}_p - \mathrm{EV}$ de d.f.). Comme on peut choisir pour S la classe $[i_{\infty,*}C]$ de $i_{\infty,*}C$ dans le quotient, $\mathscr{C}$ est l'algèbre à division étudiée par Colmez dans [**12**, §5 et §9]. On a un morphisme d'algèbres

$$C = \mathrm{End}_{\mathrm{Coh}_X^-}(i_{\infty,*}C) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Coh}_X^-/(\mathrm{Coh}_X^-)^{\mathrm{rg}^-=0}}([i_{\infty,*}C]),$$

qui fait de C une sous-algèbre commutative de $\mathscr{C}$. On pourrait également choisir comme représentant de S la classe de $B^{\varphi^h=p}$, $h \geq 1$, ou celle de $i_{x,*}C_x$, x point fermé de x (C_x est un corps perfectoïde de basculé $C^\flat$). On en déduit que $\mathscr{C}$ contient également comme sous-algèbres toutes les algèbres à division d'invariant $1/h$, $h \geq 1$ et tous les débasculements de $C^\flat$ en caractéristique zéro !

Colmez prouve que C est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathscr{C}$ ([**12**, Prop. 5.30]) et que le centre de $\mathscr{C}$ est réduit à $\mathbf{Q}_p$ ([**12**, Prop. 9.22]) (30). La question suivante est due à Laurent Fargues.

30. Peut-on le démontrer plus facilement avec la définition de $\mathscr{C}$ adoptée ci-dessus ?

Question 7.18. — *La courbe X est-elle, en un sens à préciser, « la variété de Severi-Brauer attachée à l'algèbre à division $\mathscr{C}$ » ?*

Remarque 7.19. — Si $\mathbf{H}$ est l'algèbre des quaternions de Hamilton, et $X_{\mathbf{R}}$ la variété de Severi-Brauer qui lui correspond (une conique sans point réel), on vérifie que la catégorie $\mathrm{Coh}^{-}_{X_{\mathbf{R}}}/(\mathrm{Coh}^{-}_{X_{\mathbf{R}}})^{\mathrm{rg}^{-}=0}$ a un unique objet simple, dont l'algèbre des endomorphismes est isomorphe à $\mathbf{H}$. La question précédente va donc dans le sens de l'analogie, mentionnée dans [**20**], entre la courbe de Fargues-Fontaine et la forme tordue $X_{\mathbf{R}}$ de la droite projective ([**56**]).

8. Appendice : faisceaux de périodes

Soit X un espace adique sur $\mathrm{Spa}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p)$.

Définition 8.1. — On considère les faisceaux pro-étales suivants.

— Le faisceau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}} = W(\widehat{\mathcal{O}}^{+}_{X^\flat})$. On a un morphisme de faisceaux $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \to \widehat{\mathcal{O}}^{+}_{X}$, qui s'étend en $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p] \to \widehat{\mathcal{O}}_X$.

— Le faisceau $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}} = \varprojlim_k \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]/(\ker(\theta))^k$. Il est muni d'une filtration définie par $\mathrm{Fil}^i\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}} = \ker(\theta)^i$.

— Soit t un générateur de $\mathrm{Fil}^1\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ (un tel élément existe localement pour la topologie pro-étale, est unique à une unité près et n'est pas un diviseur de zéro). On pose $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}[1/t]$ et $\mathrm{Fil}^i\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} t^{-j}\mathrm{Fil}^{i+j}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$.

— On définit $\mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ comme le faisceau associé au préfaisceau défini sur les ouverts pro-étales de X de la forme $\mathrm{Spa}(R, R^+) = \varprojlim \mathrm{Spa}(R_i, R_i^+)$ (ces ouverts forment une base de la topologie) comme la limite inductive sur i du complété $\ker(\theta)$-adique de

$$(R_i^+ \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R, R^+))[1/p],$$

le produit tensoriel complété dans la parenthèse étant p-adique. Ici

$$\theta : (R_i^+ \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R, R^+))[1/p] \to R$$

est le produit tensoriel de $R_i^+ \to R$ et de $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R, R^+) \to R$. On a encore un morphisme de faisceaux $\theta : \mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}} \to \widehat{\mathcal{O}}_X$. On définit une filtration sur $\mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ par $\mathrm{Fil}^i\mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}} = \ker(\theta)^i$.

— On pose $\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}[1/t]$ et $\mathrm{Fil}^i\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} t^{-j}\mathrm{Fil}^{i+j}\mathcal{O}\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$.

Soit X un espace adique sur C.

Définition 8.2. — Soit $I = [a, b] \subset]0, 1]$ un sous-intervalle compact, avec $a, b \in p^{\mathbf{Q}}$. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ sont tels que $|\alpha| = a$, $|\beta| = b$, on définit :

$$\mathbb{B}_I = \left(\varprojlim_n (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[[\alpha]/p, p/[\beta]])/p^n\right)[1/p].$$

On pose :

$$\mathbb{B} = \varprojlim_{I\subset]0,1[} \mathbb{B}_I.$$

Si $a \in p^{\mathbf{Q}} \cap]0, 1]$, et α est comme précédemment, on définit :

$$\mathbb{B}^{+}_a = \left(\varprojlim_n (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[[\alpha]/p])/p^n\right)[1/p].$$

On pose :

$$\mathbb{B}^{+} = \varprojlim_a \mathbb{B}^{+}_a.$$

Proposition 8.3. — *Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur C. On a*

$$H^0(S, \mathbb{B}_I) = B_I(R, R^+)$$

et

$$H^i(S, \mathbb{B}_I) = 0$$

si $i > 0$.

Démonstration. — Comme le faisceau $\mathbb{B}_I$ est obtenu en complétant p-adiquement $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[[\alpha]/p, p/[\beta]]$ puis en inversant p, on voit qu'il suffit par récurrence sur m de décrire les sections de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et de montrer que sa cohomologie s'annule. C'est ce qui est fait dans [**50**, Th. 6.5], modulo les éléments tués par toutes les puissances $[p^\flat]^{1/n}$ dans A_{inf}. Comme $[p^\flat]^{1/n}$ est inversible dans B_I pour n assez grand, cela suffit. □

Proposition 8.4. — *Soit G un groupe profini. Soit $\tilde{X} \to X$ un recouvrement pro-étale galoisien de groupe G, avec $\tilde{X} = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde perfectoïde sur C. Si $k \geq 1$, notons $\tilde{X}_k$ le produit fibré de $\tilde{X}$ k-fois avec lui-même au-dessus de X.*

$$\mathbb{B}_I(\tilde{X}_k) = \mathcal{C}^0(G^{k-1}, B_I(R, R^+)).$$

Démonstration. — On sait que $\tilde{X}_k \simeq \tilde{X} \times G^{k-1}$, puisque $\tilde{X} \to X$ est un revêtement pro-étale de groupe G. Ecrivons G comme limite inverse de groupes finis G_i. Comme dans la preuve de la proposition 8.3, il suffit de décrire les sections de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ sur $\tilde{X}_k$ et pour cela on montre par récurrence sur m que

$$W(\mathcal{O}^{\flat +})/p^m(\tilde{X}_k) = \varinjlim_i \mathrm{LC}(G_i, W(R^{\flat +}))$$

et que la cohomologie de $W(\mathcal{O}^{\flat +})/p^m$ sur $\tilde{X}_k$ en degré positif est nulle. Le deuxième point a déjà été vu dans la preuve précédente, puisque $\tilde{X}_k$ est affinoïde perfectoïde. Pour le premier, il suffit de le faire pour $m = 1$, i.e. pour $\mathcal{O}^+/p$. C'est alors une conséquence de [**50**, Lem. 3.16]. □

Soit X un espace adique localement noethérien sur $\mathrm{Spa}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p)$.

Proposition 8.5. — *On a une suite exacte de faisceaux sur $X_{C,\mathrm{proét}}$:*

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0.$$

Démonstration. — Comme les algèbres affinoïdes sympathiques forment une base de $X_{C,\mathrm{proét}}$, l'exactitude se déduit de la suite exacte (SEF 3E) de [**12**, Prop. 8.25] et du fait que $\mathbb{B}[1/t]^{\varphi=1} = \mathbb{B}^+[1/t]^{\varphi=1}$ (car pour tout entier k, $\mathbb{B}^{\varphi=p^k} = (\mathbb{B}^+)^{\varphi=p^k}$, cf. par exemple [**37**, Cor. 5.2.12]). □

Références

[1] A. Beilinson-On the derived category of perverse sheaves, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer, Berlin, 1987, pp. 27-41.

[2] A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne-Faisceaux pervers. Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5-171.

[3] V. Berkovich-Etale cohomology for non-archimedean analytic spaces. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 78 (5-161), 1993.

[4] V. Berkovich-On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces. Israel J. Math. 92 (1995), 45-60.

[5] P. Berthelot, L. Breen et W. Messing-Théorie de Dieudonné cristalline. II. Lecture Notes in Mathematics, 930. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[6] P. Berthelot et A. Ogus-Notes on crystalline cohomology. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.

[7] B. Bhatt, M. Morrow et P. Scholze-Integral p-adic Hodge theory. Prépublication 2016.

[8] B. Bhatt et P. Scholze-The pro-étale topology for schemes. Astérisque No. 369 (2015), 99-201.

[9] L. Breen-Extensions du groupe additif. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 48 (1978), 39-125.

[10] L. Breen-Extensions du groupe additif sur le site parfait. Algebraic surfaces (Orsay, 1976 ?78), pp. 238-262, Lecture Notes in Math., 868, Springer, Berlin-New York, 1981.

[11] T. Bridgeland-Flops and derived categories. Invent. Math. 147 (2002), no. 3, 613-632.

[12] P. Colmez-Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), 331-439.

[13] P. Colmez-Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque 319 (2008), p. 117-186.

[14] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł-On the cohomology of p-adic Stein spaces. En préparation.

[15] P. Colmez et W. Nizioł-Syntomic complexes and p-adic nearby cycles. Invent. math. 208 (2017), 1-108.

[16] P. Colmez et W. Nizioł-On the cohomology of the affine space. Prépublication, 2017.

[17] J. Dieudonné et A. Grothendieck-Eléments de géométrie algébrique : III. Etude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. Publications Mathématiques de l'IHES. 11 : 5-167.

[18] R. Elkik-Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6, 553 ?60, 1974.

[19] L. Fargues-Groupes analytiques rigides de type p-divisible, à paraître à Math. Annalen.

[20] L. Fargues-G-torseurs en théorie de Hodge p-adique. Prépublication. 2015.

[21] L. Fargues-Geometrization of the local Langlands correspondence : an overview, arXiv:1602.00999.

[22] L. Fargues. Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local. Prépublication 2017.

[23] L. Fargues, J.M. Fontaine-Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory, 2011.

[24] L. Fargues, J.M. Fontaine-Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, prépublication, 2015.

[25] J.M. Fontaine- Représentations l-adiques potentiellement semi-stables, Astérisque 223 (1994), Soc. Math. de France, 321-347.

[26] J.-M. Fontaine-Arithmétique des représentations p-adiques galoisiennes, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques III, Astérisque 295 (2004), 1-115.

[27] J.-M. Fontaine-Presque $\mathbf{C}_p$-représentations. Doc. Math. 2003, Extra Vol., 285-385.

[28] J.-M. Fontaine-Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043-1058. Astérisque No. 352 (2013), Exp. No. 1057, x, 509-534.

[29] J.-M. Fontaine-Communication privée, 09/08/2017.

[30] P. Gabriel-Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448.

[31] E. Große-Klönne-De Rham cohomology of rigid spaces, Mathematische Zeitschrift 247 (2004), p. 223-240.

[32] E. Große-Klönne-Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf, Journal für die reine und angewandte Mathematik 519 (2000), p. 73-95.

[33] E. Große-Klönne-Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space, J. Algebraic Geom. 14 (2005), no. 3, p. 391-437.

[34] D. Happel, I. Reiten et S. Smalø-Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 575, viii+ 88 pp.

[35] R. Huber-Etale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.

[36] L. Illusie-Complexe cotangent et déformations. II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. vii+304 pp.

[37] K. Kedlaya et R. Liu-Relative p-adic Hodge theory : Foundations, Astérisque No. 371 (2015).

[38] R. Kiehl-Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math. 2, p. 256-273, 1967.

[39] M. Kosters, D. Wan-On the arithmetic of $\mathbf{Z}_p$-extensions, Prépublication Arxiv (2016), `https://arxiv.org/abs/1607.00523`.

[40] M. Lazard-Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bull. Soc. Math. de France 83 (1955), 251-274.

[41] A.-C. Le Bras-Anneaux de Fontaine et géométrie : deux exemples d'interaction. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2017, disponible à `http://www.math.ens.fr/~lebras/`

[42] A.-C. Le Bras-Overconvergent relative de Rham cohomology over the Fargues-Fontaine curve. Prépublication. 2017.

[43] W. Lütkebohmert-Vektorraumbündel über nichtarchimedischen holomorphen Räumen. Math. Z., 152(2) (127-143), 1977.

[44] S. MacLane-Homologie des anneaux et des modules. Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956 pp. 55-80.

[45] J. S. Milne-Duality in flat cohomology of a surface, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976) 171-202.

[46] W. Nizioł-Geometric syntomic cohomology and vector bundles on the Fargues-Fontaine curve. Prépublication 2016.

[47] J. Plût-Espaces de Banach analytiques p-adiques et espaces de Banach-Colmez. Thèse Université Paris XI. 2009.

[48] P. Schneider-Nonarchimedean functional analysis. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. vi+156 pp.

[49] P. Scholze-Perfectoid spaces. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.116 (2012), 245-313.

[50] P. Scholze-p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. Forum of Mathematics, Pi, 1, e1 2013.

[51] P. Scholze-Perfectoid spaces : A survey, Current Developments in Mathematics, 2012.

[52] P. Scholze-Etale cohomology of diamonds. Prépublication, 2017.

[53] P. Scholze, J. Weinstein-Moduli of p-divisible groups, Cambridge Journal of Mathematics 1 (2013), p. 145-237.

[54] P. Scholze et J Weinstein, p-adic geometry. Notes d'un cours à UC Berkeley à l'hiver 2014, disponible à `https://math.berkeley.edu/~jared/Math274/ScholzeLectures.pdf`.

[55] J.-P. Serre-Groupes proalgébriques. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 7, 1960, 67 pp.

[56] C. Simpson-Mixed twistor structures. arXiv:alg-geom/9705006.

[57] Stacks Project.

Arthur-César Le Bras, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France et Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `arthur-cesar.le-bras@imj-prg.fr, lebras@dma.ens.fr`