Cours 1

Introduction historique : des intégrales abéliennes aux tores complexes projectifs

Références :

- [G] : P. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, Invent. Math., 1976.
- [K] : S. Kleiman, What is Abel's theorem anyway?, in The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer, 2002.

Les mathématiciens du 18e siècle et début 19e s'intéressaient beaucoup aux <u>intégrales abéliennes</u>.

Ce sont des intégrales sur un chemin, de la forme

$$\int R(x,y)\,dx\,,$$

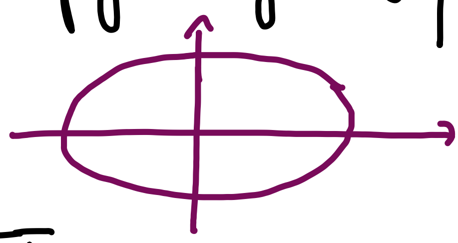
où x est une variable complexe, R une fonction rationnelle et y est une fonction implicite multivaluée de x définie par une équation de la forme $f(x,y)=0$,

avec $$f(x,y) = y^n + f_1(x)\,y^{n-1} + \dots + f_n(x),$$

avec $f_1, \dots, f_n$ des polynômes en x.

<u>Ex</u> : calculs de longueurs d'arc de figures géométriques.

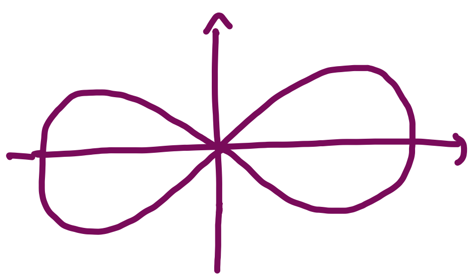
- ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a>b$



$$\rightsquigarrow a\int \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \text{ excentricité.}$$

- lemniscate de Bernoulli $x^2+y^2 = a^2(x^2-y^2)$

$$\rightsquigarrow \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}\,.$$



<u>Ex</u> : Intégrales hyperelliptiques

On suppose l'équation définissant y de la forme
$$y^2 = \varphi(x), \quad \varphi \text{ polynôme sans facteur carré.}$$

On peut réécrire l'intégrale $\int R(x,y)\,dx$ sous la forme $\int S(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$, S fraction rationnelle, P, Q polynômes.

Le premier terme s'intègre en décomposant la fraction rationnelle $S(x)$ en éléments simples. Pour le second, supposons d'abord $d = 1$ ou 2, où $d = \deg \varphi$.

- $\varphi(x) = ax + b$
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx = \int \frac{2\,P\left(\frac{y^2-b}{a}\right)dy}{a\,Q\left(\frac{y^2-b}{a}\right)}, \text{ du même}$$
type que le premier terme.

- $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Le changement de variables $u = \alpha x + \beta$, $v = \gamma y$, α, β, γ constantes bien choisies, ramène au cas $\varphi(x) = 1 - x^2$. Équation d'un cercle, que l'on peut paramétrer par $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; transforme de nouveau l'intégrale en une intégrale du premier type.

Pour $d \geq 3$, nettement plus mystérieux !

En général, on ne peut pas décrire ces intégrales à l'aide de fonctions élémentaires. Toutefois les mathématiciens du 18e–début 19e (Fagnano, Euler, Bernoulli, Legendre, …) avaient tiré différentes <u>formules d'addition</u> pour ces intégrales.

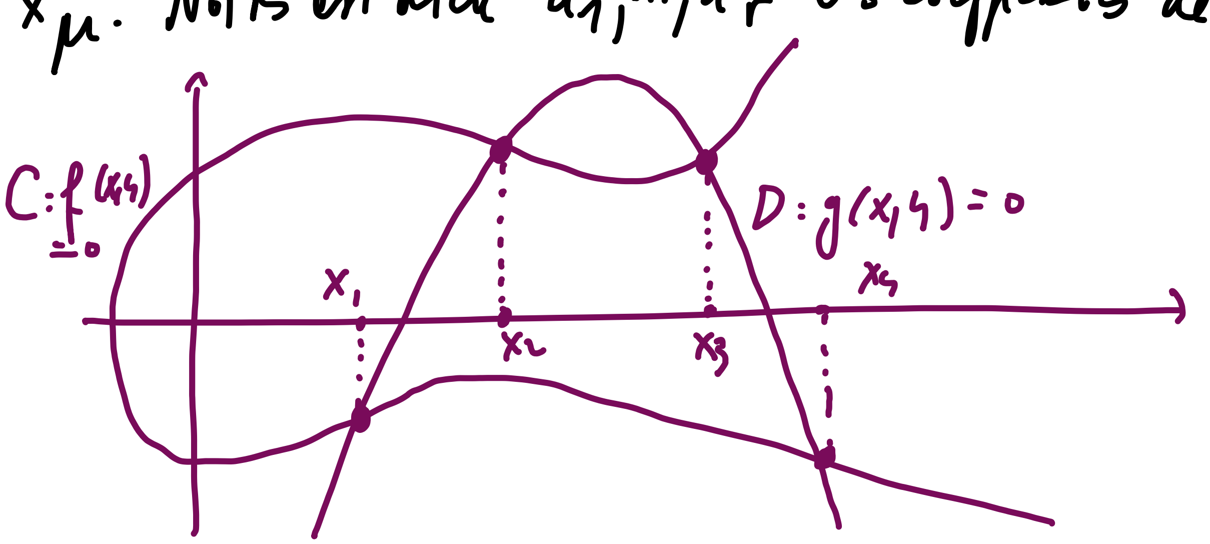
<u>Ex</u> :
$$\int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{si} \quad x_2 = \frac{2x_1\sqrt{1-x_1^4}}{1+x_1^4}.$$

(Fagnano)

[Avec 2 au lieu de 4, on a : $2\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ si $x_2 = 2x_1\sqrt{1-x_1^2}$ $\Leftarrow$ formule d'addition des sinus]

Le sujet a été révolutionné par Abel aux alentours de 1826. Pensons à l'équation $f(x,y)=0$ comme définissant une courbe C dans le plan (projectif) complexe.

Soit $g(x,y)=0$ une autre courbe D. Supposons que C et D s'intersectent en μ points, d'abscisses $x_1, \dots, x_\mu$. Notons en outre $a_1, \dots, a_r$ les coefficients de $g(x,y)$.



Voici le premier théorème d'Abel.

Th : Il existe des constantes $k_1, \dots, k_m$, des fonctions rationnelles $u, v_1, \dots, v_m$ de $a_1, \dots, a_r$ tels que

$$\sum_{i=1}^{\mu} \int_{x_0}^{x_i} R(x,y)\, dx = u + k_1 \log v_1 + \dots + k_m \log v_m.$$

x_0 ← pt base fixé

Autrement dit, même si les intégrales individuelles sont compliquées, la somme de leurs valeurs aux points d'intersection de C avec une courbe algébrique est une fonction élémentaire !

Ex : le cas simple $y = \varphi(x)$, φ polynôme. En décomposant $R(x, \varphi(x))$ en éléments simples, on se ramène par linéarité au cas $R(x, \varphi(x)) = (x-b)^q$!

Si $q \neq -1$, le membre de gauche du théorème est alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mu} \frac{(x_i - b)^{q+1}}{q+1}$. C'est une fonction rationnelle symétrique des x_i, qui sont les racines de $g(x, \varphi(x)) = 0$. Donc, elle s'exprime comme fonction rationnelle de ces coefficients (théorème des fonctions symétriques élémentaires), qui sont eux mêmes combinaisons linéaires des a_i. D'où la conclusion dans ce cas.

Ce théorème d'Abel a la conséquence intéressante suivante. Supposons $\int R(x,y)\,dx$ de <u>première espèce</u>, i.e. finie pour toute valeur de x et bornée. Avec les notations du théorème, il s'ensuit que

$$\sigma(a_1,\dots,a_r) := \sum_{i=1}^{\mu} \int_{x_0}^{x_i} R(x,y)\,dx$$

est une fonction <u>constante</u> des a_i quand ceux-ci varient.

<u>Ex</u> : On peut le voir à la main dans le cas hyperelliptique, $y^2 = \varphi(x)$, lorsque D est une droite et que $R(x,y)\,dx = \frac{P(x)}{y}$, $\deg P \leq \deg \varphi - 3$.

En particulier, si $D_1 : g_1(x,y)=0$, $D_2 : g_2(x,y)=0$ sont deux courbes algébriques intersectant C en $z_1,\dots,z_\mu$ et $z'_1,\dots,z'_\mu$ respectivement. Alors pour toute intégrale de première espèce,

$$\sum_{i=1}^{\mu} \int^{x_i} R(x,y)\,dx = \sum_{i=1}^{\mu} \int^{x'_i} R(x,y)\,dx.$$

(modulo périodes)

Dans ce cas, certains z_i peuvent être égaux à des z'_j, mais les z_i, z'_j restants sont les zéros et pôles de la fonction méromorphe g_1/g_2 sur C.

La réciproque est en fait aussi vraie (Clebsch). On pense aujourd'hui à cet énoncé comme à la description des fibres de "l'application d'Abel-Jacobi de C en degré μ".

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\int R(x,y)\,dx$ soit de première espèce est que
$$R(x,y) = \frac{h(x,y)}{\partial f/\partial y}, \text{ avec}$$
h t.q. :

- h s'annule convenablement à l'infini et lorsque $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annule.
- $\deg h \leq \deg f - 3$.

<u>Ex</u> (cas hyperelliptique) $f(x,y) = y^2 - \varphi(x)$, $\deg \varphi = d$.
Toute différentielle de première espèce est combinaison linéaire des suivantes : $\frac{dx}{y}, \frac{x\,dx}{y}, \dots, \frac{x^{g-1}dx}{y}$

avec $g = \begin{cases} (d-1)/2 & d \text{ impair} \\ (d-2)/2 & d \text{ pair} \end{cases}$.

Pour une courbe $C : f(x,y) = 0$ générale, le nombre d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes est g, le genre de C (vue comme surface de Riemann). C'est vrai essentiellement par définition, et on a la formule, si C est de degré d avec s points singuliers (ordinaires) :

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - s.$$

Enfin, Abel se pose la question de savoir combien des x_i peuvent varier indépendamment. Plus précisément, pour $C : f(x,y) = 0$ fixée et $D : g(x,y) = 0$ variable, combien de points d'intersection peuvent-ils être choisis librement, en faisant varier D ?

Soit $R_1(x,y)\,dx, \ldots, R_g(x,y)\,dx$ base de différentielles de première espèce sur C. Les équations

$$\sum_{i=1}^{\mu} \int^{x_i} R_j(x,y)\,dx = \text{constante}, \qquad k = 1, \ldots, g$$

(théorème 1)

imposent g contraintes. Pour des x_i généraux, ces équations seront indépendantes. On peut donc imaginer que le nombre α des $x_1, \dots, x_\alpha$ libres de varier arbitrairement vérifie $\mu - \alpha \leq g$.

Abel n'a pas réussi à obtenir de formule précise pour α. Le problème a été clarifié par Riemann puis Roch, trente ans plus tard. Ceux-ci établissent que : $\mu - \alpha = g - i$,

avec i le nombre de différentielles de première espèce indépendantes s'annulant en les μ points.

C'est, en termes modernes, le théorème de Riemann-Roch pour C et le diviseur $D = \sum_{i=1}^{\mu} x_i$:

$$\mu = \deg D, \quad \alpha + 1 = h^0(C, \mathcal{O}(D)), \quad g = \text{genre}, \quad i - 1 = h^0(C, \Omega^1(-D))$$

Si $\mu \geq 2g-1$, $i = 0$, donc $\mu - \alpha = g$. Dans le langage d'Abel : pour un certain m,

$$\sum_{i=1}^{\mu} \int^{x_i} R(x,y)\, dx = u + k_1 \log v_1 + \dots + k_m \log v_m$$

k_i constantes, $u, v_1, \dots, v_m$ fonctions algébriques des $x_1, \dots, x_{\mu-g}$.

<u>Application</u> : Une idée remarquable d'Abel a été d'<u>inverser</u> la formule $u = \int^{(x,y)} R(x,y)\,dx$ pour voir les coordonnées d'un point $(x(u), y(u))$ sur $C : f(x,y) = 0$ comme fonctions de u. (Idée aussi considérée par Gauß, puis Jacobi.)

Avant d'expliquer comment, il faut clarifier un point sur lequel nous avons été vague depuis le début : l'expression $R(x,y)\,dx$ peut être vue comme une forme différentielle méromorphe ω sur C. Les pôles de ω représentent une première difficulté, mais dans ce qui suit et comme plus haut, ω sera de toute façon supposée de première espèce, i.e. sans pôle. Malgré tout, l'intégrale $\int R(x,y)\,dx$ dépend du choix d'un chemin d'intégration. Toutefois, par le théorème de Cauchy, elle est bien définie modulo le $\mathbb{Z}$-module Λ engendré par les <u>périodes</u> de ω, i.e

$\int_\gamma \omega$, γ base de l'homologie.

Ceci posé, expliquons l'inversion. Observation :

Choisissons le degré m de g grand. (on veut $\mu \geq 3g$)

Fixons $\underbrace{\mu}_{= m \deg(f)} - 3g$ points sur C en position générale, notés $s_0, \dots, s_{\mu-3g}$

Prenons aussi des points $p_1, \dots, p_g$, $q_1, \dots, q_g$ sur C en position générale. Les considérations précédentes nous disent alors que les équations :

$$\sum_{i=1}^{g} \int^{p_i} R(x,y)\,dx + \sum_{i=1}^{g} \int^{q_i} R(x,y)\,dx + \sum_{i=1}^{g} \int^{r_i} R(x,y)\,dx = L$$

avec $L = \underset{\text{(dépend de } R)}{\text{constante}} - \sum_{i=0}^{\mu-3g} \int^{s_i} R(x,y)\,dx$

lorsque R parcourt une base des formes de première espèce, déterminent les r_i, $i = 1, \dots, g$, comme fonctions rationnelles des p_i, q_i. $(*)$

Revenons au problème de l'inversion :

Choisissons des points base $b_1, \dots, b_g$ tels que pour $R_i(x,y)\,dx = \dfrac{h_i(x,y)}{\partial f/\partial y}\,dx$, $i = 1, \dots, g$, base des formes de première espèce, on ait $\det\left[h_i(b_j)\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}(b_j)\right]_{i,j=1,\dots,g} \neq 0$.

Alors, par le théorème des fonctions implicites, les équations d'inconnues $p_1, \ldots, p_g$

$$u_i = \sum_{j=1}^{g} \int_{b_j}^{p_j} R_i(x,y)\, dx \,, \qquad \begin{matrix} u = (u_1, \ldots, u_g) \\ \text{proche de zéro.} \end{matrix}$$

peuvent être résolues pour $(p_1, \ldots, p_g)$ proches de $(b_1, \ldots, b_g)$. Écrivons $p_i(u) = (x_i(u), y_i(u))$.

Appliquons alors l'observation (*) :

Pour toute fonction rationnelle φ symétrique en $(x_1,y_1), \ldots, (x_g, y_g)$, on aura, avec

$$F_\varphi(u) = \varphi\big((x_1(u), y_1(u)), \ldots, (x_g(u), y_g(u))\big)$$

que $F_\varphi(-(u+u'))$ peut s'exprimer comme fonction rationnelle de $F_\varphi(u)$ et $F_\varphi(u')$, pour u, u' proches de zéro. Cette relation permet d'étendre F_φ, définie initialement sur un petit disque $D(0,r)$ autour de 0, au disque $D(0,2r)$ et de proche en proche, au plan complexe tout entier en une fonction méromorphe.

Faisant ceci pour φ, et donc F_φ, parcourant une base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ de l'espace des fonctions rationnelles symétriques, on obtient finalement un plongement méromorphe

$$F = [1, \underbrace{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_N}}] : \mathbb{C}^g / \Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

réseau des périodes

telle que $F(u)$ détermine des points $(x_i(u), y_i(u))$, $i = 1, \dots, g$, sur C satisfaisant les équations :

$$\forall i = 1, \dots, g, \quad u_i = \sum_j \int_{b_j}^{(x_j(u), y_j(u))} R_i(x,y)\, dx .$$

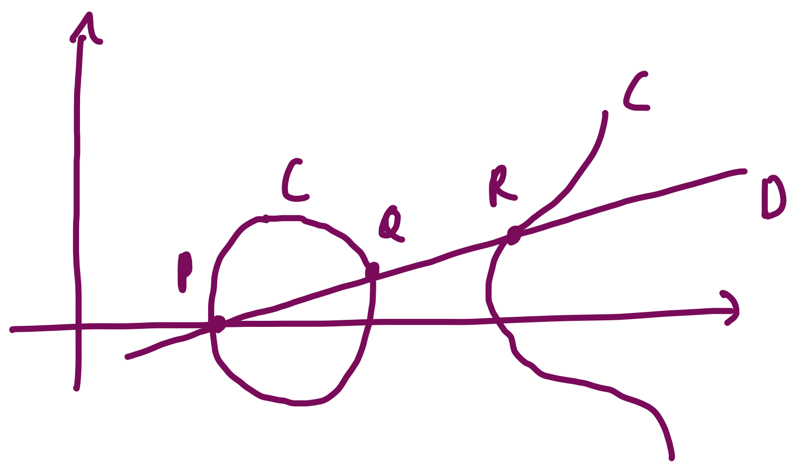
Notons aussi que la construction a muni l'ensemble des g-uplets $(p_1, \dots, p_g) \in C^g$ modulo permutation, d'une structure de groupe, rationnellement (car les arguments supposaient toujours le g-uplet en position générale).

En termes plus modernes, on a "montré" que $C^{(g)} = C^g / \mathfrak{S}_g$ et $\mathbb{C}^g/\Lambda$ sont birationnelles.

Explicitons ceci en genre 1. Soit $C : f(x,y)=0$ une cubique non singulière. Alors $g=1$ et on n'a à considérer qu'une seule intégrale de première espèce.

Si $f(x,y) = y^2 - \varphi(x)$, $\deg \varphi = 3$, cette intégrale s'écrit explicitement :
$$\int \frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)}}.$$
(intégrale elliptique déjà rencontrée)

Choisissons pour D une droite. Elle rencontre C en trois points P, Q, R et le théorème d'Abel prend la forme :
$$\int^P \frac{dx}{\partial f/\partial y} + \int^Q \frac{dx}{\partial f/\partial y} + \int^R \frac{dx}{\partial f/\partial y} = 0.$$



(points réels)

L'inversion de cette intégrale elliptique menée comme ci-dessus construit une fonction méromorphe $(x(u), y(u))$ satisfaisant :

$$f(x(u), y(u)) = 0, \quad x'(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(u), y(u)).$$

Il s'agit de la fonction de Weierstrass. C'est une fonction remarquable dont nous reprendrons la construction lors de la prochaine séance, par voie analytique.

Rq. Pour une très jolie application du théorème d'addition d'Abel (au problème de Poncelet) due à Jacobi, voir [G], pages 335-48.