Cours 2

Fonctions elliptiques, abéliennes et fonctions thêta

Références :

[L] : S. Lang, Elliptic Functions, Springer : ch. I.

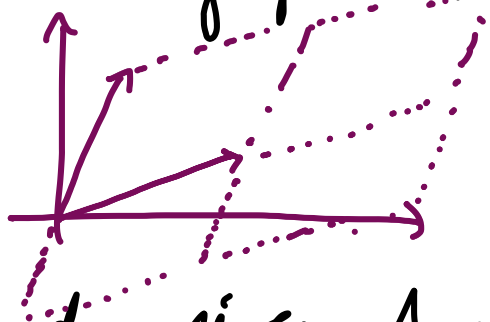
[M] : D. Mumford, Tata lectures on Theta I, Birkhäuser - Boston, 1982 : I § 1, 3, 4, 5, II § 1, 3.

Fonction $\wp$ de Weierstrass

(← pour un modèle en plâtre du graphe de sa partie réelle, cf. salle commune IRMA !)

Nous allons maintenant reprendre la construction de la fonction de Weierstrass rencontrée au cours plus précédent, de façon plus précise et analytique.

Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$ (i.e un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ engendré par une $\mathbb{R}$-base).



<u>Déf</u> : La fonction de Weierstrass $\wp$ du réseau Λ est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Cette fonction a un pôle d'ordre 2 en tout $z \in \Lambda$.
On montre que cette série converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, donc est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ (exercice : le vérifier). De plus,

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

est méromorphe avec pôles triples en les $z \in \Lambda$.

Enfin, $\wp$ et $\wp'$ sont périodiques vis-à-vis de Λ.

Pour $k>2$, notons $G_k(\Lambda) = \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^k}$.

<u>Exo</u> : Vérifier que l'on a le développement en série entière : $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, G_{2n+2}(\Lambda)\, z^{2n}$.

Considérons l'expression

$$\psi(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + \underbrace{60\, G_4(\Lambda)}_{=:\, g_2(\Lambda)} \wp(z) + \underbrace{140\, G_6(\Lambda)}_{=:\, g_3(\Lambda)}$$

Un calcul avec le développement en série entière de l'exercice précédent montre que $\psi(0) = 0$.

Comme $\wp$ et $\wp'$ n'ont des pôles qu'en les $z\in\Lambda$, ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\Lambda$, mais aussi par ce qu'on vient de dire et par périodicité, partout. Par périodicité, elle est bornée par les valeurs qu'elle prend sur un parallélogramme fondamental pour Λ. Elle est bornée et entière, donc constante par Liouville. Comme elle s'annule en 0, elle est nulle et finalement on a montré que $\wp$ satisfait l'équation différentielle :

$$\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) - g_2(\Lambda)\wp(z) - g_3(\Lambda).$$

En d'autres termes, $z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z))$ définit un morphisme $F : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow C(\mathbb{C})$, où C est la courbe cubique d'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda).$$

On va montrer que c'est un isomorphisme.

<u>Rappel</u> : Formule des résidus : γ courbe simple fermée dans le plan complexe, f méromorphe sur un ouvert contenant γ et son intérieur, sans pôle sur γ. Si $z_1, \dots, z_r$ sont les pôles de f à l'intérieur de γ,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

$\Longrightarrow$ γ courbe simple fermée, f méromorphe sur un ouvert contenant γ et son intérieur, sans zéro ni pôle sur γ, g non nulle holomorphe sur le même ouvert.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{w \in \operatorname{int}(\gamma)} g(w)\,\operatorname{ord}_w(f).$$

<u>Corollaire</u> : Soit Λ réseau de $\mathbb{C}$, f une fonction <u>elliptique</u> pour Λ, i.e. f méromorphe sur $\mathbb{C}$ et Λ-périodique. Le nombre de zéros de f (comptés avec multiplicités) dans un parallélogramme fondamental est égal à son nombre de pôles dans ce parallélogramme.

<u>Dém</u> : Il suffit par périodicité de le montrer pour un parallélogramme fondamental $\mathcal{P}$. On peut le choisir tel que son bord ne contienne ni zéro ni pôle de f (ceux-ci formant un ensemble discret). On considère

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz .$$

Comme f est Λ-périodique, f' aussi, et donc $\frac{f'}{f}$ aussi et donc la somme des intégrales de $\frac{f'}{f}$ sur des côtés opposés du parallélogramme est nulle. Donc l'intégrale est nulle, ce qui fournit la conclusion désirée par le fait rappelé avant l'énoncé du corollaire. ∎

Montrons que F est bijective.

• <u>Surjectivité</u> : Soit $(x_0, y_0) \in C(\mathbb{C})$. La fonction $z \mapsto \wp(z) - x_0$ est périodique pour Λ avec un pôle double en chaque élément de Λ. Donc elle a deux zéros dans chaque parallélogramme fondamental, par le corollaire ci-dessus.

Soit z_0 un zéro. Alors $(\wp(z_0), \wp'(z_0)) = (x_0, \pm y_0)$ et donc $(x_0, y_0) = F(\pm z_0)$.

• <u>Injectivité</u> : Soient z_1, z_2 dans le parallélogramme fondamental standard et supposons $F(z_1) = F(z_2)$.

<u>Lemme</u> : Si $z \notin \Lambda$, $\wp'(z) = 0 \Leftrightarrow 2z \in \Lambda$.

<u>Démo</u> : Exercice.

Supposons tout d'abord $z_1 \in 2\Lambda$, $z_1 \notin \Lambda$, i.e. si ω_1, ω_2 base de Λ, $z_1 = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Considérons $z \mapsto \wp(z) - \wp(z_1)$

Elle est elliptique d'ordre 2, donc a deux zéros dans le parallélogramme fondamental. Or par le lemme $\wp'(z_1) = 0$, donc z_1 est un zéro double, donc est le seul.

Donc les images des points de $\frac{1}{2}\Lambda \setminus \Lambda$ par $\wp$ sont distincts.

Supposons $2z_1 \notin \Lambda$, i.e. $\wp'(z_1) \neq 0$. Par le raisonnement ci-dessus, $z \mapsto \wp(z) - \wp(z_1)$ a deux zéros dans le parallélogramme, qui doivent être z_1 et $-z_1$ mod Λ. Donc $z_2 = \pm z_1$ modulo Λ. Comme $\wp'(z_1) = \wp'(z_2)$ aussi, et que $\wp'(-z_1) = -\wp'(z_1) \neq \wp(z_1)$ puisque $\wp'(z_1) \neq 0$, on a nécessairement $z_1 = z_2$. ∎

<u>Rq</u>: F est compatible à la structure de groupe, définie sur C par tangentes et sécantes.

Réciproquement, soit C une cubique non-singulière dans $\mathbb{P}^2$. Il est connu que l'on peut choisir l'équation affine de C sous la forme

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}.$$

On notera: $$j(C) = 1728 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} \qquad (\text{"}j\text{-invariant"})$$

C'est un nombre complexe bien défini qui détermine C à isomorphisme (compatible à la structure de groupe) près.

Notons $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$. Tout réseau Λ de $\mathbb{C}$ est homothétique à un réseau Λ de la forme $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathcal{H}$. On note

$$j(\tau) = \frac{1728 \quad g_2(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})^3}{g_2(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})^3 - 27\, g_3(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})^2} .$$

On peut montrer que j définit une fonction holomorphe surjective $j : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. En particulier, pour toute cubique non-singulière C dans $\mathbb{P}^2$, il existe un réseau Λ tel que

$$j(\Lambda) = j(C), \quad \text{i.e.}$$

$\mathbb{C}/\Lambda \simeq C$ via l'application F étudiée plus haut.

<u>Conclusion</u> : On a identifié tores complexes de dimension 1 et cubiques non singulières. En particulier, toute telle cubique est munie d'une loi de groupe (fait "établi" géométriquement lors du cours précédent).

En dimension supérieure, pour un réseau Λ de $\mathbb{C}^g$, $g>1$, il n'est pas toujours possible de construire une <u>fonction abélienne</u>, i.e. une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^g$ et Λ-périodique. On verra pourquoi dans les cours suivants. Ce phénomène se comprend bien avec les fonctions thêta.

Rq: On pourrait aussi, avant de passer en dimension supérieure, se demander ce qui se passe si $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ réseau est remplacé par un sous-groupe $\simeq \mathbb{Z}$. On peut le supposer égal à $\mathbb{Z}$. La réponse est la suivante :

Posons
$$P(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n} \right)$$
$$= \frac{1}{z} \sum \zeta(2k)\, z^{2k}.$$

L'application P est un isomorphisme de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{\pm \pi i\}$ (pour le voir, observer que $P(z) = R(e^{2i\pi z})$, $R(z) = \pi i \frac{z+1}{z-1}$.)

De plus, on a l'équation
$$-P'(z) = P(z)^2 + \pi^2 \quad \text{et}$$
$F : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2$, $z \mapsto (P(z), -P'(z))$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^*$ et la conique lisse projective $y = x^2 + \pi^2$ privée des deux points où $y = 0$.

Fonctions thêta

Plutôt que de chercher à construire des fonctions méromorphes Λ-périodiques (i.e. des fonctions abéliennes), on peut chercher à construire des fonctions holomorphes satisfaisant une condition de quasi-périodicité vis-à-vis de Λ ; le quotient de deux telles fonctions sera alors une fonction abélienne. Ces fonctions holomorphes quasi-périodiques sont les fonctions thêta étudiées par Jacobi puis Riemann.

Rq : Comme déjà vu plus haut, il n'est pas raisonnable de chercher à construire des fonctions holomorphes Λ-périodiques : celles-ci sont nécessairement constantes, par le théorème de Liouville !

Nous commençons par la théorie en dim 1.

Considérons la fonction

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2\tau + 2i\pi n z)$$

pour $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathcal{H}$. Cette série converge absolu-

…vent uniformément sur les compacts : si
$|\mathrm{Im}\, z| \leq M$, $\mathrm{Im}\,\tau \geq \varepsilon$,

$$|\exp(\pi i n^2\tau + 2i\pi n z)| \leq \exp(-\pi\varepsilon)^{n^2} \exp(2\pi M)^n.$$

Choisissons N tel que $\exp(-\pi\varepsilon)^N \exp(2\pi M) < 1$.
Alors l'inégalité

$$|\exp(\pi i n^2\tau + 2i\pi n z)| \leq \exp(-\pi\varepsilon)^{n(n-N)}$$

pour $n \geq N$ montre que la série converge.

On a $\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau)$. On a aussi

$$\begin{aligned} \theta(z+\tau,\tau) &= \sum_n \exp(\pi i n^2\tau + 2i\pi n(z+\tau)) \\ &= \sum_n \exp(\pi i (n+1)^2\tau - \pi i\tau + 2i\pi n z) \\ &= \sum_m \exp(\pi i m^2\tau - \pi i\tau + 2i\pi m z - 2i\pi z) \\ &= \exp(-\pi i\tau - 2i\pi z)\, \theta(z,\tau). \end{aligned}$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad \theta(z + a\tau + b, \tau) = \exp(-\pi i a^2\tau - 2i\pi a z)\, \theta(z,\tau)$$

C'est la condition précise de "quasi-périodicité" vis-à-vis de $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ évoquée plus haut.

Rq : Réciproquement, si l'on cherche une fonction f entière tq $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+\tau) = \exp(az+b)f(z)$, en développant, à l'aide de la première équation, f en série de Fourier : $f(z) = \sum a_n \exp(2i\pi nz)$ et en utilisant

$$\exp(az+b)f(z) = f(z+\tau) = f(z+\tau+1) = \exp a \, \exp(az+b) f(z),$$

on voit que $a = 2i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. L'équation

$$f(z+\tau) = \exp(az+b) f(z)$$

donne alors sur le développement de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = a_{n-k} \exp(b - 2i\pi n\tau).$$

On distingue les cas :

- $k = 0$ $\quad f(z) = \exp(2i\pi z)$ (à scalaire près), pas intéressant.
- $k > 0$ $\quad$ relation de récurrence montre que les coefficients grandissent trop vite.
- $k = -1$ $\quad$ On trouve (essentiellement) $\theta(-,\tau)$!.
- $k < -1$ $\quad$ Voir après.

Ces calculs rendent l'apparition de θ moins mystérieuse.

Variantes : Notons pour $a, b \in \mathbb{R}$, et $\tau \in \mathcal{H}$ fixé,

$$S_b : f \mapsto (z \mapsto f(z+b))$$
$$T_a : f \mapsto (z \mapsto \exp(\pi i a^2 \tau + 2i\pi a z) f(z+a\tau))$$

Les S_b pour b variant commutent entre eux, ainsi que les T_a pour a variant. Mais

$$S_b \circ T_a = \exp(2i\pi ab)\, T_a \circ S_b .$$

Le groupe d'opérateurs engendré par les T_a et S_b est $\mathcal{G} = S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où (λ, a, b) correspond à $U_{(\lambda,a,b)} : f \mapsto \lambda\, T_a \circ S_b(f)$.

Loi de groupe sur $\mathcal{G}$: $(\lambda, a, b) \cdot (\lambda', a', b')$
$$= (\lambda\lambda' \exp(2i\pi a b'), a+a', b+b').$$

Le groupe $\mathcal{G}$ est nilpotent : $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = S^1 = Z(\mathcal{G})$.

Ce groupe s'appelle groupe de Heisenberg car il apparaît aussi en mécanique quantique.

Notons $\Gamma = \{(1, a, b) \in \mathcal{G},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ et plus généralement pour l entier ≥ 1, $l\Gamma = \{(1, la, lb) \in \mathcal{G},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Soit V_ℓ = espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ invariantes par $\ell\Gamma$.

Par ce qu'on a vu plus haut, V_1 est engendré par θ. Plus généralement :

<u>Lemme</u> : f entière est dans V_ℓ ssi
$$f(z) = \sum_{n \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}} c_n \exp(\pi i n^2 \tau + 2i\pi n z)$$
avec $c_n = c_m$ si $n - m \in \ell\mathbb{Z}$. En particulier, $\dim V_\ell = \ell^2$.

<u>Lemme</u> : le groupe $\mathcal{G}_\ell := \left\{ (\lambda, a, b) \in \mathcal{G},\ \begin{matrix} \lambda^{\ell^2} = 1, \\ a, b \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z} \end{matrix} \right\} / \ell\Gamma$ agit sur V_ℓ et cette action est irréductible.

Ces deux lemmes se vérifient par des calculs élémentaires sur les développements de Fourier (cf [M], I §4).

<u>Conséquence</u> : pour $a, b \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}$, posons
$$\theta_{a,b} = S_b T_a \theta.$$
$\theta_{a,b}$ ne dépend à constante près que de $(a,b) \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^2$.
Par le lemme

Application géométrique des fonctions thêta :

Soit $\ell \geq 2$, et $C_\tau = \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau}$, $\tau \in \mathcal{H}$.

Notons (a_j, b_j) un ensemble de représentants de $\left(\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^2$ dans $\left(\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}\right)^2$, $0 \leq j \leq \ell^2-1$, et écrivons $\theta_j = \theta_{a_j, b_j}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on peut former le ℓ^2-uplet :

$$\phi_\ell(z) := \left(\theta_0(\ell z, \tau), \dots, \theta_{\ell^2-1}(\ell z, \tau)\right).$$

On a, pour tout $0 \leq j \leq \ell^2-1$,

$$\theta_j(z+\ell, \tau) = \theta_j(z, \tau),$$

$$\theta_j(z+\ell\tau, \tau) = \exp\underbrace{(-\pi i \ell^2\tau - 2i\pi\ell z)}_{\text{indép. de } j}\, \theta_j(z, \tau),$$

ϕ_ℓ définit une application holomorphe :

$$\phi_\ell : C_\tau \to \mathbb{P}^{\ell^2-1}.$$

Il faut toutefois vérifier qu'elle est bien définie. La même preuve que pour le corollaire du théorème des résidus énoncé plus haut, mais pour $f \in V_\ell$

et en se souvenant que f est quasi-périodique et pas périodique, montre qu'une telle f a exactement ℓ^2 zéros dans tout parallélogramme fondamental pour $\ell\mathbb{Z} \oplus \ell\mathbb{Z}\tau$. De plus, $\theta_{a,b}$ s'annule en les ℓ^2 points $(a+p+\frac{1}{2})\tau + b+q+\frac{1}{2}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, contenus dans un tel parallélogramme, donc ne peut avoir que ces zéros. En particulier, θ_j et $\theta_{j'}$, $j \neq j'$ n'ont pas de zéro commun et ϕ_ℓ est bien définie.

On voit aussi que ϕ_ℓ est un plongement : supposons $\phi_\ell(z_1) = \phi_\ell(z_2)$ ou $d\phi_\ell(z_1) = 0$. On peut translater par $a\tau+b$, $a, b \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}$ pour obtenir une seconde paire (z_1', z_2') avec la même propriété. Prenons alors ℓ^2-3 points supplémentaires $w_1, w_2, \ldots, w_{\ell^2-3}$, distincts de $\ell\mathbb{Z} \oplus \ell\mathbb{Z}\tau$. Soit $f \neq 0 \in V_\ell$ tq

$$f(z_1) = f(z_1') = f(w_1) = \cdots = f(w_{\ell^2-3}) = 0$$

(c'est possible : écrivant $f = \sum c_j \theta_j$, donne ℓ^2-1 équations linéaires en les ℓ^2 inconnues c_j). Comme

$\phi_\ell(t_1) = \phi_\ell(t_2)$, $f(t_2)=0$. Ou bien, si $d\phi(t_1)=0$, f a un zéro double en t_1. De même, $f(t_2')=0$ ou f a un zéro double en t_1'. Donc f a ℓ^2+1 zéros au moins dans C_τ, contredisant un fait vu plus haut.

Ainsi, on a fabriqué pour chaque $\ell \geq 2$, un plongement ϕ_ℓ de C_τ dans un espace projectif. Par un théorème de Chow (sur lequel nous reviendrons plus tard), cela entraîne que $\phi_\ell(C_\tau)$ est découpée par un nombre (fini) d'équations polynomiales homogènes. Dans ce cas précis, on peut le voir à la main en utilisant les nombreuses relations qui existent entre fonctions thêta.

<u>Ex</u> : $\ell=2$ $\qquad \phi_2(C_\tau)$ est la courbe de $\mathbb{P}^3$ définie par les équations quadratiques :

$$\theta_{00}(0)^2 w^2 = \theta_{01}(0)^2 x^2 + \theta_{10}(0) y^2$$

$$\theta_{00}(0)^2 z^2 = \theta_{10}(0)^2 x^2 - \theta_{01}(0)^2 y^2.$$

Notons aussi que via le plongement ϕ_ℓ, on peut construire des fonctions méromorphes sur G_τ, par restriction de fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^{\ell^2-1}$!

Ex : $\ell = 2$, $\dfrac{\theta_{ab}(2z)}{\theta_{00}(2z)}$.

(C'est l'idée initiale de construire des fonctions elliptiques comme quotients de fonctions thêta.)

Par exemple, $\wp(z) = \dfrac{\theta_{11}'(0)^2}{\theta_{00}(0)^2} \dfrac{\theta_{00}(z)^2}{\theta_{11}(z)^2} + \text{cste}$.

<u>Aperçu de la théorie en dimension supérieure :</u>

Pour généraliser la construction de $\theta(z, \tau)$, on remplace $z \in \mathbb{C}$ par $\vec{z} = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$

et $\tau \in \mathcal{H}$ par $\Omega \in \mathcal{H}_g = \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices complexes} \\ \text{symétriques avec} \\ \operatorname{Im}\Omega \text{ définie} > 0 \end{array} \right\}$

$\underset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{C}^{g(g+1)/2}$.

On pose :

$$\theta(\vec{z}, \Omega) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\, {}^t\vec{n}\,\Omega\,\vec{n} + 2i\pi\, {}^t\vec{n}\,\vec{z}).$$

θ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$.
(Ici sont utilisées les hypothèses sur Ω.)

À Ω, on peut associer le réseau

$$\Lambda_\Omega = \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g.$$

(engendré par les vecteurs unité et les vecteurs colonnes de Ω)

Quasi-périodicité : $\forall \vec{m} \in \mathbb{Z}^g$,

$$\theta(\vec{z} + \vec{m}, \Omega) = \theta(\vec{z}, \Omega)$$

$$\theta(\vec{z} + \Omega\vec{m}, \Omega) = \exp(-\pi i\, {}^t\vec{m}\,\Omega\,\vec{m} - 2i\pi\, {}^t m\,\vec{z})\,\theta(\vec{z}, \Omega).$$

Cette fonction thêta permet elle aussi de construire des plongements projectifs du tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda_\Omega$. C'est un théorème de Lefschetz que nous démontrerons plus tard. Pour le moment, contentons-nous de constater la différence avec le cas $g=1$: les réseaux Λ_Ω de $\mathbb{C}^g$ indexés par

$\Omega \in \mathcal{H}_g$ forment un espace à $\frac{g(g+1)}{2}$ paramètres complexes, alors qu'un réseau $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ général est de la forme $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$, $\Omega \in M_{g\times g}(\mathbb{C})$ $\det(\operatorname{Im}\Omega) \neq 0$
et donc dépend de g^2 paramètres.