Cours 3

Fibrés en droites sur les tores complexes

Références :

[D] : O. Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours spécialisés SMF, 1999.

[M] : D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1974. (Chapitre 1)

1) Groupes de Lie et tores complexes

Dans ce cours, nous avons déjà rencontré à plusieurs reprises des quotients de la forme V/Λ, V $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, Λ réseau de V.

Sur un tel quotient $X = V/\Lambda$, on a une structure naturelle de variété complexe : famille de cartes données par des ouverts $U \subseteq V$ ne rencontrant aucun de leurs translatés par Λ ; les changements de carte sont des translations par des éléments de Λ, donc holomorphes. Une fonction sur un ouvert U de X est holomorphe ssi $f \circ \pi$ l'est sur $\pi^{-1}(U)$, avec $\pi : V \to X$ projection canonique. Si $f : X = V/\Lambda \to X' = V'/\Lambda'$ est une application continue entre tores complexes, comme V est simplement connexe et V' le revêtement universel de X', f se relève en $\tilde{f} : V \to V'$ continue. Elle est holomorphe ssi $\tilde{f}$ l'est. En particulier, les opérations définissant la structure de groupe sur X sont holomorphes. Par conséquent, tout tore complexe est un <u>groupe de Lie complexe</u>.

<u>Rq</u> : Avec les notations ci-dessus, si f et $\tilde{f}$ sont holomorphes, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{f}_\lambda : v \mapsto \tilde{f}(v+\lambda) - \tilde{f}(v)$ est holomorphe à valeurs dans Λ', donc constante. Donc chaque dérivée partielle de $\tilde{f}$ est Λ-périodique et holomorphe, donc constante. Par conséquent, $\tilde{f}$ est affine et donc f est de la forme

$$f(0) + \left(\begin{array}{c}\text{morphisme de groupe de} \\ \text{Lie complexes}\end{array}\right).$$

Si X est un tore complexe, X est aussi compact et connexe, comme espace topologique. Réciproquement, les propriétés que l'on vient d'énumérer caractérisent les tores complexes :

<u>Proposition 1</u> : Si X est un groupe de Lie complexe compact et connexe, X est un tore complexe.

<u>Rq</u> : (indice pour la preuve) : Si X est un tore complexe, $X = V/\Lambda$, on a $V \simeq T_0 X$ (espace tangent en 0).

<u>Dém</u> : On fera usage des faits suivants (rappelés sans démonstration — les preuves sont une transposition au monde holomorphe des preuves dans le cas C^∞) :

Soit Y un groupe de Lie complexe, $T_0 Y$ l'espace tangent de Y en 0.

- Pour tout $v \in T_0 Y$, il existe une unique application de groupes de Lie complexes $\phi_v : \mathbb{C} \to Y$ telle que $d\phi_{v,0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\right) = v$. De plus, $\phi_v(t)$ comme fonction de t et v est une application holomorphe $\mathbb{C} \times T_0 Y \to Y$.

<u>Déf</u> : On définit $\exp : T_0 Y \to Y$ par : $\exp(v) = \phi_v(1)$.

On a :

- $\forall t$, $\exp(tv) = \phi_v(t)$ (unicité de ϕ_v).
- $\exp(0) = 0$
- $d\exp_0 : T_0(T_0 Y) = T_0 Y \to T_0 Y$ est l'identité.
- Si $f : Y \to Y'$ est un morphisme de groupes de Lie complexes, $f \circ \exp_Y = \exp_{Y'} \circ df_0$ (unicité).

On peut maintenant commencer la démonstration.

Pour $x \in X$, notons $C_x : X \to X$
$y \mapsto xyx^{-1}$.

La différentielle $(dC_x)_0$ est un automorphisme de T_0X, et $x \mapsto (dC_x)_0$ est une application holomorphe de X dans $\mathrm{End}(T_0X)$. Or ce dernier est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et X est compact connexe. Par conséquent, cette application est constante et donc $(dC_x)_0$ est indépendant de x : $(dC_x)_0 = (dC_0)_0 = \mathrm{Id}_{T_0X}$.

Par la formule rappelée ci-dessus appliquée à $Y = Y' = X$, $f = C_x$, on a : $C_x(\exp v) = \exp((dC_x)_0 v)$, pour tout $x \in X$, $v \in T_0X$. Donc $C_x(\exp(v)) = \exp(v)$ i.e. $\exp(T_0X) \subseteq Z(X)$ (= centre de X). Mais $d(\exp)_0 = \mathrm{id}_{T_0X}$, donc par le théorème des fonctions implicites, $\exp$ est un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans T_0X sur un voisinage de 0 dans X. Le sous-groupe de X engendré par $\exp(T_0X)$ est donc ouvert, donc fermé (son complémentaire est une union de translatés de lui-même) et X est connexe. Donc $X = \exp(T_0X)$ et donc X est commutatif.

En particulier, pour tous $v, w \in T_0 X$, le morphisme $\mathbb{C} \to X$, $t \mapsto \exp(tv).\exp(tw)$ est un morphisme de groupes de Lie complexes. L'image du vecteur tangent unité par la différentielle en 0 de cette application est $v+w$. Par unicité, on a donc

$$\exp(tv).\exp(tw) = \exp(t(v+w)).$$

Donc l'exponentielle est un morphisme de groupe de Lie complexes. Il est surjectif, comme vu plus haut. Soit Λ son noyau. C'est un sous-groupe discret de $V = T_0 X$ puisque $\exp$ est injective sur un voisinage de 0. Le morphisme induit $V/\Lambda \to X$ est holomorphe (par définition de la structure complexe sur la source). C'est un isomorphisme de groupes. Son application tangente en 0 est l'identité donc son inverse est holomorphe en 0 et donc aussi partout par translations. Par conséquent, $V/\Lambda \simeq X$ comme groupes de Lie complexes. Comme les sous-groupes discrets d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie cocompacts sont des réseaux, Λ est un réseau de V. ∎

Rq : Soit X un tore complexe. Comme groupe abstrait, X est divisible (i.e. $nX = X$, pour tout $n \neq 0 \in \mathbb{Z}$) et $\ker(X \xrightarrow{\times n} X) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, $g = \dim X$.
(En effet, comme groupe de Lie réel, $X \simeq (S^1)^{2g}$).

2) Considérations cohomologiques

Proposition 2 : Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe. Soit $n \geq 1$ un entier. On a des isomorphismes :

1) $H^n(X, \mathbb{Z}) \simeq \{$ groupe des n-formes linéaires alternées $\Lambda \times \ldots \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ $\}$

2) Si $\overline{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-antilinéaire}}(V, \mathbb{C})$,
$H^n(X, \mathcal{O}_X) \simeq \Lambda^n \overline{T}$.

Ceux-ci sont en outre compatibles au sens suivant : via l'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X$, on a un morphisme $H^n(X, \mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathcal{O}_X)$. On a aussi

$$\Lambda^n(\Lambda^*) \longrightarrow \Lambda^n(T \oplus \overline{T}) \longrightarrow \Lambda^n \overline{T}.$$

Λ^n(inclusion naturelle $\Lambda^* \to T \oplus \overline{T}$)

$T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-lin}}(V, \mathbb{C})$

projection sur le facteur $(0, n)$

Alors le diagramme formé de ces deux applications et des isomorphismes ci-dessus commute.

<u>Dém</u> : 1) n'est pas difficile : V est le revêtement universel de X, donc $\pi_1(X, 0) \simeq 1$. Comme

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}),$$ l'assertion est correcte pour $n=1$. Pour conclure pour n quelconque, il suffit de prouver que pour tout n, le cup-produit donne un isomorphisme : $\Lambda^n H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathbb{Z})$. (*)

Pour cela, noter que comme variété réelle, $X = (S^1)^{2g}$ et appliquer Künneth pour voir que si (*) est vraie pour deux variétés, il l'est pour leur produit (sous ces hypothèses, $H^i(-, \mathbb{Z})$ sans torsion, donc pas de Tor dans Künneth). Comme (*) est vraie pour S^1, on conclut.

2) est plus délicat : on utilise la <u>résolution de Dolbeault</u> :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}_X^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_X^{0,1} \longrightarrow \cdots$$

où $\mathcal{E}^{p,q}$ = faisceau des formes différentielles C^∞ à valeurs complexes de type (p,q), $\bar\partial$ = composante de type $(0,1)$ de la différentielle extérieure.

(Note : $f : U \to \mathbb{C}$ C^∞ est holomorphe ssi df est $\mathbb{C}$-linéaire $\Leftrightarrow$ df de type $(1,0)$. Donc f^* préserve le type des formes $\Rightarrow$ on peut définir la notion de forme de type (p,q) sur une variété complexe, puisque les changements de carte sont holomorphes.)

Donc : $H^n(X, \mathcal{O}_X) = \dfrac{\{(0,n)\text{-formes } \bar\partial\text{-fermées sur } X\}}{\bar\partial(\{0,n-1)\text{-formes sur } X\})}$

les $\mathcal{C}^{p,q}$ étant acycliques.

En outre, on a un isomorphisme

$$\mathcal{C}^{0,0} \otimes_{\mathbb{C}} (\Lambda^p T \oplus \Lambda^q \bar{T}) \to \mathcal{C}^{p,q}$$

("multipliant une forme différentielle invariante par translations de type (p,q) par une fonction C^∞".)

Ainsi, on voit que :

$$H^n(X, \mathcal{O}_X) = H^n(\underbrace{\Gamma(X, \mathcal{C}^{0,0}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^\bullet \bar{T}}_{\text{différentielle : } \bar\partial(f \otimes \alpha) = \bar\partial f \wedge \alpha.})$$

(on utilise aussi que les formes différentielles invariantes par translation sont automatiquement fermées.)

Pour conclure, on démontre que l'inclusion

$$\Lambda^\bullet \overline{T} \to \Gamma(X, \mathcal{E}^{0,0}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^\bullet \overline{T}$$

induit un isomorphisme en cohomologie, i.e. toute $(0,q)$-forme fermée est cohomologue à une $(0,q)$-forme constante. (cf. [M], p. 5-7)

Pour la compatibilité, cf [M], Remark 3, p. 9. ∎

<u>Proposition 3</u> : Soit Y un espace topologique, muni d'une action continue d'un groupe discret G, agissant librement totalement discontinûment. Soit $X = Y/G$, $\pi : Y \to X$ la projection. Pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X et tout $n \geq 0$, il existe une application naturelle :

$$\underbrace{H^n(G, \Gamma(Y, \pi^*\mathcal{F}))}_{\text{cohomologie des groupes}} \to H^n(X, \mathcal{F})$$

compatible au cup-produit et qui est un isomorphisme si $H^i(Y, \pi^*\mathcal{F}) = 0$ $\forall i > 0$.

(Cas particulier de la suite spectrale de Leray.)

Proposition 4 : Pour tous $g \geq 1$ et $n \geq 1$, on a
$$H^n(\mathbb{C}^g, \mathbb{Z}) = 0 \ , \quad H^n(\mathbb{C}^g, \mathcal{O}) = 0 .$$

Démo :

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe.
En mettant ensemble les Propositions 3 et 4, on obtient des isomorphismes
$$H^n(\Lambda, \mathbb{Z}) \simeq H^n(X, \mathbb{Z})$$
pour tout $n \geq 0$ (énoncé analogue pour $\mathcal{O}$).
Prenons $n = 2$. Le morphisme associant à
$$F : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z} \quad \text{l'application}$$
$$AF : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}, \quad AF(\lambda, \lambda') = F(\lambda, \lambda') - F(\lambda', \lambda)$$
envoie 2-cocycles sur formes linéaires alternées et induit un isomorphisme
$$A : H^2(\Lambda, \mathbb{Z}) \simeq \operatorname{Hom}(\Lambda^2 \Lambda, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 \underbrace{\Lambda^*}_{= \operatorname{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})}.$$
De plus, si $\xi, \eta \in \Lambda^* = H^1(\Lambda, \mathbb{Z})$,
$$A(\xi \cup \eta) = \xi \wedge \eta .$$

(La preuve que A envoie cocycles sur formes linéaires alternées et cobords sur 0 est un simple calcul. Le fait que A induit un isomorphisme en cohomologie se réduit à la dernière assertion, puisque les deux côtés sont $\Lambda^2 \Lambda^*$ (le premier par la proposition 2 et $H^2(\Lambda, \mathbb{Z}) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$). Ceci est de nouveau un calcul. Pour les détails, voir [M], lemma p. 15.)

On a ainsi deux identifications $\Lambda^2 \Lambda^* \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ (celle juste explicitée résultant de la proposition 3 et celle de la proposition 2). Elles coïncident : comme elles sont toutes deux compatibles au cup-produit, cela vient de l'énoncé analogue en degré 1, qui se vérifie directement.

3) Fibrés en droites : généralités

On rappelle la définition générale :

Déf : Soit X une variété complexe. Un fibré en droites L sur X est une variété complexe (aussi notée L), d'une application holomorphe $p : L \to X$, telles qu'il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X et des isomorphismes $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{C}$, tels que : $\forall \alpha, \beta$, $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C} \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$ est donnée par $(x, t) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)\, t)$,

$g_{\alpha\beta}$ holomorphe sur $U_\alpha \cap U_\beta$, ne s'annulant pas.

Une <u>section</u> de ce fibré est une section (holomorphe) de p. Elles forment un $\mathbb{C}$-ev noté $\Gamma(X, L)$.

Deux fibrés en droites sont <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de variétés complexes $u : L \xrightarrow{\sim} L'$, commutant à p, et linéaire sur les fibres : si (U_α) est un recouvrement trivialisant L et L', on veut que

$$\varphi'_\alpha(u(\varphi_\alpha^{-1}(x,t))) = (x, h_\alpha(x)\, t)$$

h_α holomorphe ne s'annulant pas.

Enfin, si $f : Y \to X$ application holomorphe, L fibré en droites sur X, on note

$$f^* L = \{(y, \ell) \in Y \times L,\ p(\ell) = f(y)\}$$

muni de la première projection. C'est un fibré en droites et on a : $f^* : \Gamma(X, L) \to \Gamma(Y, f^* L)$, $s \mapsto (y \mapsto (y, s(f(y))))$

On pense à (L,p) comme au recollement des $U_\alpha \times \mathbb{C}$ via les fonctions de transition $(g_{\alpha\beta})$. Celles-ci sont des fonctions holomorphes ne s'annulant pas et vérifiant :

$$g_{\alpha\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha} = 1.$$

On peut ainsi définir le dual d'un fibré en droites donné par $(U_\alpha, g_{\alpha\beta})$ comme donné par $(U_\alpha, g_{\alpha\beta}^{-1})$. Définition semblable pour le produit tensoriel. Ces opérations définissent une structure de groupe sur l'ensemble des fibrés en droites sur X et aussi sur l'ensemble noté $\mathrm{Pic}\, X$ des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X.

Dans ce point de vue explicite, une section s de L correspond à une famille de fonctions holomorphes (s_α) sur (U_α) vérifiant $s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s_\beta$.

Rq : Associer à un ouvert U de X l'espace vectoriel des sections de la restriction de L à U définit un faisceau localement libre de rang 1, dont les sections globales sont (par définition) $\Gamma(X, L)$.

<u>Proposition 5</u> : Soit X une variété complexe.

On a : $$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

<u>Dém</u> : Un fibré en droites L sur X correspond à une famille $(U_\alpha, g_{\alpha\beta})$ comme ci-dessus. Cette donnée définit, comme les $g_{\alpha\beta}$ ne s'annulent pas, un 1-cocycle de Čech $g \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$. La condition
$$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\gamma} = 1$$
montre que g définit un élément de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Changer les trivialisations φ_α change $g_{\alpha\beta}$ en $g_{\alpha\beta}\frac{g_\alpha}{g_\beta}$, si l'on a changé φ_α en multipliant sa deuxième composante par une fonction holomorphe g_α ne s'annulant pas. Ceci ne change pas la classe de g dans $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Raffiner $\mathcal{U}$ revient à restreindre g. Donc on a une application bien définie
$$\varphi : \mathrm{Pic}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$
Si $\varphi(L) = 0$, $\exists\, \mathcal{U}'$ plus fin que $\mathcal{U}$ tel que $g_{|\mathcal{U}'}$ est de la forme $\frac{g_\alpha}{g_\beta}$. Mais alors L est trivial. La surjectivité est facile.

Enfin, la construction montre que φ est un morphisme de groupes. ∎

Sur une variété complexe X, on dispose de la suite exacte de faisceaux abéliens dite exponentielle :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

(Se souvenir que la surjectivité d'un morphisme de faisceaux est une assertion locale !)

Déf : Soit X variété complexe, L fibré en droites sur X. On appelle classe de Chern de L l'image de la classe de L dans $\mathrm{Pic}(X)$ par

$$\underset{\text{Prop. 5}}{\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)} \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

morphisme de connexion dans la suite exacte longue induite par la suite exacte exponentielle

On la note $c_1(L)$. On note $\mathrm{Pic}^0(X)$ le noyau de $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ et $NS(X)$ son image.

Rq : Si $L \leftrightarrow (U_\alpha, g_{\alpha\beta})$, choisie de sorte que les intersections des U_α sont contractiles, notons $h_{\alpha\beta}$ détermination de $\frac{1}{2i\pi} \log g_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Posons $c_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha}$.

On a $\exp(2i\pi c_{\alpha\beta}) = 1$, donc $c_{\alpha\beta\gamma}$ est à valeurs entières. On calcule que $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta$, sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta$, $c_{\beta\gamma\delta} - c_{\alpha\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\delta} - c_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Donc $c = (c_{\alpha\beta\gamma})$ définit un cocycle $\in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, qui donne l'élément $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

4) Fibrés en droites sur les tores complexes

Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe. Comme corollaire de la suite exacte exponentielle et de la proposition 4, on obtient :
$$\mathrm{Pic}(V) = 0.$$

Par conséquent, si L est un fibré en droites sur X, et $\pi : V \to X$, on peut fixer un isomorphisme
$$\pi^* L \simeq V \times \mathbb{C}.$$

Le fibré $\pi^* L$ est muni d'une action de Λ et induit donc par cet isomorphisme une action de Λ couvrant l'action de Λ sur V par translations et linéaire sur $\mathbb{C}$.

Autrement dit, $\lambda \in \Lambda$ agit sur (z, t)

par $\lambda \cdot (z, t) = (\lambda + z, e_\lambda(z) t)$,
$e_\lambda : V \to \mathbb{C}^*$ holomorphe. La condition d'avoir une action s'écrit :

$$e_{\lambda+\lambda'}(z) = e_\lambda(z+\lambda') e_{\lambda'}(z),$$

i.e. $\lambda \mapsto e_\lambda$ est un 1-cocycle pour Λ à coefficients dans $\Gamma(V, \mathcal{O}^*)$. Si l'on multiplie la trivialisation choisie de $\pi^* L$ par une fonction $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}^\times)$, on change e_λ en

$$z \mapsto e_\lambda(z) f(z+\lambda) f(z)^{-1}.$$

D'où une application :

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^1(\Lambda, \Gamma(V, \mathcal{O}^\times)).$$

Réciproquement, la donnée d'un tel cocycle (e_λ) permet de définir un fibré L sur X, comme quotient de $V \times \mathbb{C}$ par l'action de Λ $(z, t) \mapsto (z+\lambda, e_\lambda(z) t)$.

On a donc un isomorphisme.

<u>Rq</u> : Cet isomorphisme coïncide avec celui déduit de la proposition 3, comme on peut le vérifier en calculant sur les cocycles le morphisme de la proposition 3.

Pour conclure ce cours, nous allons chercher une paramétrisation explicite des fibrés en droites sur X et faire ainsi le lien avec la théorie des fonctions thêta.

$\mathbb{C}$-lin. à droite, $\mathbb{C}$-antilin. à gauche

Soit H une forme hermitienne sur V, telle que $E = \operatorname{Im} H$ soit à valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$. Soit $\alpha : \Lambda \to S^1$ t.q. $\alpha(\lambda + \lambda') = \exp(i\pi E(\lambda,\lambda'))\, \alpha(\lambda)\, \alpha(\lambda')$.

Alors $e_\lambda(z) = \alpha(\lambda) \exp\left(\pi H(\lambda, z) + \frac{\pi}{2} H(\lambda,\lambda)\right)$ vérifie la condition de cocycle dérivée. On note $L(H,\alpha)$ le fibré en droites sur X correspondant.

<u>Rq</u> : Notons $\pi : V \times \mathbb{C} \to L(H,\alpha)$ la projection canonique. Soit $s \in \Gamma(X, L(H,\alpha))$. Notons $\theta_s(z)$ l'unique élément de $\mathbb{C}$ t.q. $\Pi(z, \theta_s(z)) = s(\pi(z))$.
La relation $\Pi(z+\lambda, \theta_s(z+\lambda)) = \Pi(z, \theta_s(z))$ donne :

$$\theta_s(z+\lambda) = e_\lambda(z)\, \theta_s(z).$$

Autrement dit, $\Gamma(X, L(H,\alpha))$ est un espace de fonctions thêta !

Cela fournit un point de vue géométrique sur les fonctions thêta : elles correspondent aux sections de fibrés en droites sur les tores complexes. Cela permettra aussi de mieux comprendre pourquoi elles fournissent (dans certains cas) des plongements projectifs comme vu dans le dernier cours : cf. prochain cours.

Rq : Les formes alternées réelles F sur V vérifiant $F(ix, iy) = F(x,y)$ $\forall x,y \in V$ correspondent bijectivement aux formes hermitiennes H sur V. Poser :

$$E = \operatorname{Im} H, \quad H(x,y) = E(x, iy) + i\, E(x,y)$$

(exercice).

Montrons que les $L(H,\alpha)$ donnent tous les fibrés, une et une seule fois.

La suite exacte

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

s'écrit :

$$0 \to \Lambda^* \xrightarrow{(1)} \overline{T} \xrightarrow{(2)} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{(3)} \Lambda^2\Lambda^* \xrightarrow{(4)} \Lambda^2\overline{T}.$$

avec :

(1) : $\omega \mapsto \omega_{\mathbb{R}}^{0,1} : (z \mapsto i\omega_{\mathbb{R}}(z) - \omega_{\mathbb{R}}(iz))$

(2) : $\ell \mapsto L(0, \exp(2i\pi \operatorname{Im} \ell(-)))$.

(3) : envoie $H(L,\alpha)$ sur $\operatorname{Im} H$.

(4) : $\omega \mapsto \omega_{\mathbb{R}}^{0,2}$.

<u>Proposition 6</u> : Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe. On a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to NS(X) \to 0.$$

et $\mathrm{Pic}^0(X)$ est isomorphe au tore complexe

$$\overline{T}/\Lambda^\vee, \quad \Lambda^\vee = \{\ell \in \overline{T},\ \operatorname{Im}\ell(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

C'est aussi le groupe des caractères $\Lambda \to S^1$. On appelle ce tore le tore <u>dual</u> de X.

<u>Dém</u>, La première partie découle de la suite exacte ci-dessus. Par l'isomorphisme entre $\overline{T}/\Lambda^\vee$ et $\mathrm{Hom}(\Lambda, S^1)$, un caractère unitaire de Λ

est déterminé par ses valeurs sur une base. Notons-les $e^{2i\pi\alpha_1}, \dots, e^{2i\pi\alpha_{2g}}$. On lui associe la forme $\mathbb{R}$-linéaire $l_{\mathbb{R}} : V \to \mathbb{R}$ envoyant le j-ème vecteur de base sur α_j, puis une forme $\mathbb{C}$-antilinéaire par $l(z) = -l_{\mathbb{R}}(iz) + i l_{\mathbb{R}}(z)$. C'est une surjection de noyau $\Lambda^\vee$. D'où l'isomorphisme cherché, qui montre aussi que $\overline{T}/\Lambda^\vee$ est un tore complexe (puisque $\mathrm{Hom}(\Lambda, S^1)$ est compact). ■

<u>Théorème (Appell-Humbert)</u> : Tout fibré en droites L sur X est de la forme $L(H, \alpha)$. Le couple (H, α) est uniquement déterminé par L.

<u>Dém</u>, le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des $L(0, \alpha)$, cf. Proposition 6. Ensuite, $NS(X)$ s'identifie aux formes hermitiennes sur V de partie imaginaire à valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$: en effet, $NS(X)$ est par le diagramme ci-dessus le noyau de $\Lambda^2 \Lambda^* \to \Lambda^2 \overline{T}$. Si $E \in \Lambda^2 \Lambda^*$,

notons $E_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V \times V, \mathbb{C})$ la forme alternée induite et décomposons $E_{\mathbb{R}} = E_1 + E_2 + E_3$, avec $E_1 \in \Lambda^2 T$, $E_2 \in \Lambda^2 \overline{T}$, $E_3 \in T \otimes \overline{T}$. Comme $E_{\mathbb{R}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $E_2 = \overline{E_1}$ et donc E est dans le noyau ssi $E_{\mathbb{R}} = E_3$. Cela signifie que $E_{\mathbb{R}}(ix, iy) = E_{\mathbb{R}}(x, y)$ $\forall x, y \in V$ et donc en appliquant la remarque ci-dessus, une telle E correspond exactement à une forme hermitienne H telle que $\mathrm{Im}\, H$ est à valeurs entières sur $\Lambda \times \Lambda$.

De plus, via cette identification, $c_1(L(H, \alpha))$ correspond à H.

Pour conclure la preuve, il suffit donc de montrer que pour tout H il existe un α convenable, ce que nous laissons en exercice. ∎

Notons que l'ensemble des données (H, α) comme ci-dessus peut être muni d'une structure de groupe par $(H, \alpha) \cdot (H', \alpha') = (H + H', \alpha\alpha')$ et que $L(H,\alpha) \otimes L(H',\alpha') = L(H+H', \alpha\alpha')$,

i.e le morphisme $L : \{(H,\alpha)\} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ est
$$(H,\alpha) \longmapsto L(H,\alpha)$$
un morphisme de groupes dont on vient de montrer la bijectivité. En d'autres termes, on peut résumer sous forme plus diagrammatique le théorème d'Appell-Humbert :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] & NS(X) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Lambda, S^1) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \{(H,\alpha)\} \arrow[r] \arrow[u, "L", "\wr"'] & \left\{ \begin{array}{c} H \text{ hermitienne} \\ \mathrm{Im}\, H(\Lambda\times\Lambda) \subseteq \mathbb{Z} \end{array} \right\} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & 0
\end{tikzcd}$$