Cours 6

Espaces de modules

1) Espace de modules

Soit X une variété abélienne, i.e. $X = V/\Lambda$ est un tore complexe muni d'une polarisation. À celle-ci est associée son type, le g-uplet d'entiers $(d_1, \dots, d_g)$ défini lors du cours 4. Notons encore $\Delta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_g)$.

Par le théorème de Riemann vu dans ce même cours, une variété abélienne polarisée de type Δ est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}^g$ par

$$\Lambda_\Omega = \Omega \mathbb{Z}^g \oplus \Delta \mathbb{Z}^g,$$

avec $\underbrace{\Omega \in \mathcal{H}_g}_{\text{demi-espace de Siegel}} = \{ \Omega \in M_g(\mathbb{C}),\ \Omega = {}^t\Omega,\ \operatorname{Im} \Omega > 0 \}$

On notera $X_\Omega = \mathbb{C}^g / \Lambda_\Omega$. Deux variétés X_Ω et $X_{\Omega'}$ de cette forme sont isomorphes ssi il existe un automorphisme de $\mathbb{C}^g$ avec $u(\Lambda_\Omega) = \Lambda_{\Omega'}$. Si l'on suppose de plus que cet isomorphisme respecte la polarisation, on peut vérifier que cela équivaut à dire qu'il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_\Delta := \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}^{-1} M_{2g}(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$

$\cap \, Sp_{2g}(\mathbb{Q})$

groupe symplectique

$:= \left\{ M \in Gl_n(\mathbb{Q}), \; {}^tM \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

telle que $\Omega' = (a\Omega + b)(c\Omega + d)^{-1}$ ← automatiquement inversible.

La formule définit bien une action à gauche de G_Δ sur $\mathcal{H}_g$. (exercice)

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes polarisées de type Δ est en bijection avec le quotient $\mathcal{H}_g / G_\Delta$, pour l'action définie ci-dessus.

Le quotient $\mathcal{H}_g / G_\Delta$ est a priori juste un ensemble, mais nous allons voir qu'il a bien davantage de structure.

2) Structure analytique / algébrique

Digression : espaces analytiques

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ouvert, $f_1, \dots, f_k$ des fonctions holomorphes sur U, $Z = \{x \in U,\ f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$.
On peut munir Z du faisceau

$$\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_U / \mathcal{J}_Z \quad , \mathcal{J}_Z = (f_1, \dots, f_k).$$

Un <u>espace analytique</u> est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ localement isomorphe à $(Z, \mathcal{O}_Z)$, avec $Z, \mathcal{O}_Z$ comme ci-dessus, qui est séparé.
On appelle $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un modèle local de $(X, \mathcal{O}_X)$.

Un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est <u>lisse en un point</u> x s'il a un modèle local en x qui est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si X est lisse en tout $x \in X$, X est dit lisse et est alors une variété analytique complexe.

<u>Analogie</u> :

Analytique		Algébrique (local[t])
espace analytique	$\longleftrightarrow$	schéma de type fini / $\mathbb{C}$ séparé
variété analytique	$\longleftrightarrow$	schéma lisse / $\mathbb{C}$

Rq : C'est plus qu'une simple analogie, puisqu'on peut passer de la droite vers la gauche : si X est un schéma séparé (local^t) de type fini sur $\mathbb{C}$, $X(\mathbb{C})$ porte naturellement une structure d'espace analytique.

<u>Théorème (Cartan)</u> : X espace analytique complexe, G groupe agissant proprement discontinûment sur X (i.e. pour tout compact $K \subseteq X$, $\{g \in G,\ gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini). Notons $p : X \to X/G$ application quotient. Alors le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur X/G défini par $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C},\ f \circ p \text{ holomorphe sur } p^{-1}(U)\}$, $U \subseteq X/G$ ouvert, fait de X/G un espace analytique.

<u>Lemme</u> : Tout sous-groupe discret G de $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{H}_g$ proprement discontinûment.

<u>Dém</u> : K compact de $\mathcal{H}_g$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ telle que $M.K \cap K \neq \emptyset$. Soit Ω dans l'intersection.

et notons $\Omega' = M^{-1} \cdot \Omega$. Soit H, H' les formes hermitiennes de matrices $(\mathrm{Im}\,\Omega)^{-1}$, $(\mathrm{Im}\,\Omega')^{-1}$, u l'automorphisme de $\mathbb{C}^g$ de matrice ${}^t(c\Omega+d)^{-1}$. On a :

$$H' = H \circ u.$$

Comme $\mathrm{Im}\,\Omega$, $\mathrm{Im}\,\Omega'$ sont dans un compact, il en est de même pour u. Donc $c\Omega + d$ est dans un compact, donc sa partie imaginaire $c\,\mathrm{Im}\,\Omega$ aussi, donc aussi c, donc aussi d. On a $a\Omega'+b = \Omega(c\Omega'+d)$, donc $a\Omega'+b$ est aussi dans un compact, donc finalement aussi a et b par le même raisonnement.

Donc M appartient à un sous-ensemble compact de G discret, i.e. fini.

Le théorème de Cartan s'applique donc et montre que $G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g$ a une structure d'espace analytique. On l'appelle <u>espace de modules des variétés abéliennes polarisées de type Δ</u> et on le note $\mathcal{A}_{g,\Delta}$. Si

$\Delta = I_g$, on note simplement A_g, <u>l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées</u>.

En fait, on peut aller plus loin et montrer que $A_{g,\Delta}$ est l'analytifié d'une variété algébrique quasi-projective (localᵗ fermée dans un espace projectif). Pour cela, on utilise à nouveau le théorème de Chow pour se ramener à construire un plongement de $A_{g,\Delta}$ dans un espace projectif, dont l'adhérence sera une variété projective. Plutôt que de construire directement des fonctions méromorphes sur $A_{g,\Delta}$, on utilise une idée semblable à celle appliquée pour les tores complexes : on fabrique "beaucoup" de fonctions holomorphes sur $A_{g,\Delta}$ se transformant toutes de la même façon sous G_Δ.

Pour cela, on se rappelle que les fonctions thêta dépendaient de deux paramètres z et Ω. Jusque là, le premier variait et le second était fixé ; cela donnait des sections de fibrés en droites sur le tore complexe associé à Ω. Désormais, on va faire l'inverse : fixer $z=0$ et faire bouger Ω, i.e. la variété abélienne.

Un peu plus précisément : pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathcal{H}_g$, $z \in \mathbb{C}^g$, notons :

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z, \Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp i\pi\left({}^t(m+a)\Omega(m+a) + 2\,{}^t(m+a)(z+b)\right)$$

Si a est tel que $a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$, $\Delta = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_g)$ $d_1, \dots, d_g > 0$ entiers $d_1 | \dots | d_g$

$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\cdot, \Omega)$ est une fonction theta sur

$$X_\Omega = \mathbb{C}^g / \Omega\mathbb{Z}^g + \Delta\mathbb{Z}^g$$

normalisée pour le fibré ("normalisée" : cf preuve de RR)

$$L_\Omega = L\left(H : (z, z') \mapsto {}^t\bar{z}(\mathrm{Im}\,\Omega)^{-1}z', \ \alpha : \Omega p + \Delta q \mapsto (-1)^{{}^tp\Delta q}\right)$$

Les $\left(\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(\cdot,\Omega)\right)_{a\in\Delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}$ forment une base de l'espace des fonctions thêta associées à ce fibré.

<u>Théorème</u> : Si $4 \mid d_1$, $\exists$ sous-groupe distingué d'indice fini de G_Δ tel que pour tout $a\in\Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$, tout g dans ce sous-groupe, et tout $\Omega\in\mathcal{H}_g$,

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\, g\cdot\Omega) = \underbrace{\det(c\Omega+d)^{1/2}}_{\substack{\text{bien défini pour} \\ g \text{ dans ce sous-groupe}}}\,\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega).$$

si $g = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on ignorera <u>pour simplifier</u> la différence entre G_Δ et ce sous-groupe.

Notons que pour tout $\Omega\in\mathcal{H}_g$, il existe $a\in\Delta^{-1}\mathbb{Z}^g$ tel que $\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega)\neq 0$ (conséquence du théorème de Lefschetz).

Si $4 \mid d_1$, on a donc une application holomorphe <u>bien définie</u> :

$$\Psi : \mathcal{A}_{g,\Delta} \longrightarrow \mathbb{P}^{d_1 \cdots d_g - 1}$$
$$\Omega \longmapsto \left(\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega)\right)_{a \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}$$

C'est cette application dont on montre qu'elle est un plongement, faisant de $\mathcal{A}_{g,\Delta}$ une variété quasi-projective.

La preuve que ψ est une immersion repose sur des arguments assez semblables à ceux utilisés pour démontrer le théorème de Lefschetz. La preuve que ψ est injective est instructive : les $\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(z,\Omega)$ vérifient des relations quadratiques dites <u>relations de Riemann</u> dont les coefficients sont des $\theta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega)$.

$$\sum_{\substack{a_1,a_2,a_3,a_4 \\ \in \Delta^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}} \underbrace{c_{a_1,a_2,a_3,a_4}}_{\text{constantes}} \theta\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega)\, \theta\begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix}(0,\Omega)\, \theta\begin{bmatrix} a_3 \\ 0 \end{bmatrix}(z,\Omega)\, \theta\begin{bmatrix} a_4 \\ 0 \end{bmatrix}(z,\Omega) = 0$$

On montre que $\psi_{L_\Omega}(X_\Omega)$ (L_Ω, X_Ω comme au-dessus) est exactement l'intersection des quadriques dans l'espace projectif définies par ces équations. Donc si $\psi(\Omega)=\psi(\Omega')$, $\underbrace{\psi_{L_\Omega}(X_\Omega)=\psi_{L_{\Omega'}}(X_{\Omega'})}_{\text{plongements}}$

et de plus $\psi_{L_\Omega}(0)=\psi_{L_{\Omega'}}(0)$. Donc $X_{\Omega'}\simeq X_\Omega$ (comme tores complexes) et cet isomorphisme u est tel que $u^*L_\Omega \simeq u^*\psi_{L_\Omega}^*\mathcal{O}(1)=\psi_{L_{\Omega'}}^*\mathcal{O}(1)\simeq L_{\Omega'}$, donc c'est un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées, ce qui donne l'injectivité.

Pour les détails, voir [BL], Ch. 8.

3) Pourquoi un espace de modules ?

Le fait que l'ensemble paramétrant certaines variétés analytiques/algébriques (ici, variétés abéliennes polarisées) soit lui-même un espace analytique/une variété algébrique est conceptuellement frappant et une idée ancienne en géométrie algébrique (e.g., géométrie projective).

Mais cela donne aussi des informations sur les objets paramétrés, en exploitant la topologie/géométrie de l'espace de modules. Nous allons en voir deux exemples simples (et un autre tout à la fin du semestre !).

Exemple 1 : (endomorphismes)

Proposition : Pour tout $g \geq 1$, il existe une variété abélienne (simple) X de dimension g, avec

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}.$$

$\mathbb{C}^g / \Omega \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$

Dém : Il suffit de montrer que $\{\Omega \in \mathcal{H}_g,\ \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_\Omega) \neq \mathbb{Q}\}$ est contenu dans une union dénombrable de sous-espaces analytiques stricts de $\mathcal{H}_g$. En effet, un tel sous-ensemble analytique est d'intérieur vide et on pourra appliquer le théorème de Baire.

Un endomorphisme u de X_Ω correspond à un endo-morphisme de $\mathbb{C}^g$ préservant $\Lambda_\Omega = \Omega\mathbb{Z}^g \oplus \Delta\mathbb{Z}^g$. Il lui correspond donc une matrice $M_u \in M_g(\mathbb{C})$ et une matrice $N_u \in M_{2g}(\mathbb{Z})$. La première est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^g$, la seconde celle de u dans la base $(\Omega \ \ I_g)$.

Elles sont reliées par: (argument analogue à celui du calcul de G_Δ plus haut)

$$M_u(\Omega \ I_g) = (\Omega \ I_g)\, N_u.$$

Si $N \in M_{2g}(\mathbb{Q})$, notons

$$S(N) = \{ \Omega \in \mathcal{H}_g,\ N \text{ matrice d'un endomorphisme de } X_\Omega \}$$

Si N n'est pas scalaire, $S(N)$ est un sous-ensemble analytique strict : écrivant ${}^tN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation ci-dessus donne $M\Omega = \Omega\, {}^ta + {}^tb$, $N = \Omega\, {}^tc + {}^td$

c'est-à-dire $\Omega(\Omega c + d) = \Omega a + b$.

Donc $S(N)$ est bien un ensemble analytique. Strict: exercice.

Exemple 2 (familles)

On aimerait que $A_{g,\Delta}$ ait la propriété plus forte suivante : si S variété complexe analytique, une application holomorphe de S vers $A_{g,\Delta}$ est la même chose qu'une famille de variétés abéliennes sur S, i.e. une application holomorphe propre $f : X \to S$ et une section $e : S \to X$, telles que $\forall s \in S$, X_s est une variété abélienne d'origine $e(s)$. Dans ce cas, $A_{g,\Delta}$ paramétrerait les variétés abéliennes en un sens fort.

Hélas, ce n'est pas tout à fait vrai pour $A_{g,\Delta}$. Il faut ajouter une structure de niveau, ce qui revient à remplacer G_Δ par un sous-groupe d'indice fini. Nous ignorerons ce point ici et prétendrons que tout fonctionne pour $A_{g,\Delta}$.

Soit alors $X \to \mathbb{C}$ une famille de variétés abéliennes polarisées de type Δ sur la droite de dim $g > 1$

affine. Elle correspond à une application holomorphe $\mathbb{C} \to A_{g,\Delta}$. Or le revêtement universel de $A_{g,\Delta}$ est $\mathcal{H}_g$, donc cette application se relève en une application holomorphe $\mathbb{C} \to \mathcal{H}_g$. Celle-ci est nécessairement constante.