F. Jouve, A.-C. Le Bras

Corrigé succinct de l'examen

Exercice 1

1. On justifie l'existence de l'intégrale à calculer par prolongement continu en 0 et par intégration par parties en l'infini.
   Notons $C_{\varepsilon,T}$ (resp. C_ε) le contour (resp. le quart de cercle centré en 0 et joignant ε et $i\varepsilon$) précisé dans l'indication. On a
   $$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant K_s \varepsilon^{\operatorname{Re} s}\,,$$
   où K_s est une constante ne dépendant que de s. Le majorant tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ si $\operatorname{Re} s > 0$.
   De même, les contributions de $[T, T+iT]$ et de $[iT, T+iT]$ à l'intégrale curviligne sont $o(T)$ lorsque $T \to \infty$. En effet, lorsque $T \to \infty$:
   $$\int_0^T |e^{-(T+iu)}(T+iu)^{s-1}|\,\mathrm{d}u = O(e^{-T}T^{\operatorname{Re} s})\,,\quad \int_0^T |e^{-(u+iT)}(u+iT)^{s-1}|\,\mathrm{d}u = O\left(T^{\operatorname{Re} s-1}\int_0^T e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)\,.$$
   On note que la seconde intégrale est bien en $o(T)$ puisque $\operatorname{Re} s < 1$.
   L'application du théorème de Cauchy à la fonction holomorphe f sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ contenant le support de $C_{\varepsilon,T}$ et son intérieur (de sorte que l'on peut utiliser la détermination principale du logarithme sur cet ouvert pour définir z^{s-1}) donne, en faisant $\varepsilon \to 0$ et $T \to \infty$:
   $$\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-iu}(iu)^{s-1}\,i\mathrm{d}u = i^s\int_0^\infty e^{-iu}u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,.$$
   On recommence ensuite le raisonnement pour la même fonction f intégrée sur le contour symétrique de $C_{\varepsilon,T}$ par rapport à l'axe réel. On obtient de manière similaire :
   $$\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{iu}(-iu)^{s-1}\,(-i)\mathrm{d}u = (-i)^s\int_0^\infty e^{iu}u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,.$$
   Pour conclure, on écrit $i^s = \exp(is\pi/2)$ (et $(-i)^s = \exp(-is\pi/2)$) et l'on fait la différence des membres de gauche et de droites des deux égalités obtenues.
2. Par la propriété d'holomorphie sous $\int$ vue en cours, il est clair que pour chaque $\varepsilon \in]0,1[$ fixé, l'intégrale à paramètre $F_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\sin(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t$ est une fonction entière de la variable s. Il suffit de montrer que sur tout compact $K \subseteq \{z\colon -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, on a convergence uniforme de F_ε vers l'intégrale considérée dans l'exercice. Fixons un tel compact K. Il existe donc $\delta > 0$, $R > 0$, tels que $K \subseteq \{z\colon -1+\delta < \operatorname{Re} z < 1-\delta,\ |z| \leqslant R\}$. Si $\operatorname{Re} s \in]-1+\delta, 1-\delta[$ et $t \in]\varepsilon, 1]$, alors $|\sin(t)t^{s-1}| \leqslant t^{\operatorname{Re} s} \leqslant t^{-1+\delta}$ dont l'intégrale sur $]0,1]$ converge.
   Par ailleurs, pour un tel s, une intégration par parties donne
   $$\int_1^{1/\varepsilon}\sin(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)t^{s-1}]_1^{1/\varepsilon} + (s-1)\int_1^{1/\varepsilon}\cos(y)y^{s-2}\,\mathrm{d}y\,.$$

On utilise, pour $t \geqslant 1$, les inégalités $|\cos(t)t^{s-1}| \leqslant t^{-\delta}$, $|s-1| \leqslant R$ et $|\cos(t)t^{s-2}| \leqslant t^{-\delta-1}$ dont l'intégrale est convergente sur $[1, \infty[$.
Ainsi $s \mapsto \int_0^\infty \sin(u)u^{s-1}\,du$ est une fonction holomorphe de s sur $-1 < \operatorname{Re} s < 1$. Enfin $s \mapsto \sin(\pi s/2)\Gamma(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ puisque le pôle simple de Γ en 0 est compensé par le zéro de sin en 0. On conclut par prolongement analytique que l'égalité de la question 1 reste vraie si $-1 < \operatorname{Re} s < 1$.

Exercice 2

1. On peut regarder $\exp(\exp(z))$ sur la bande $\{z, -\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$. Si $z = x + iy$, $|\exp(\exp(x+iy))| = \exp(\Re(\exp(x+iy))) = \exp(\exp(x)\cos(y))$. Donc si $\Im(z) = \pm\pi/2$, $|\exp(\exp(z))| = 1$. Toutefois $\exp(\exp(z))$ tend très vite vers l'infini sur l'axe réel.
2. (a) Si $r > 0$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ et $z = re^{i\theta}$, $g(z) = \exp(r^{1-\delta/2}e^{i(1-\delta/2)\theta})$ et donc
$$|g(z)| = \exp(r^{1-\delta/2}\cos((1-\delta/2)\theta)).$$
Si z est sur l'axe imaginaire et non nul, on a donc bien $|g(z)| \geqslant \exp(0) = 1$, estimation encore valable en 0. Si $|z| = R$,
$$|g(z)| \geqslant \exp(mR^{1-\delta/2}),$$
avec $m = \cos((1-\delta/2)\pi/2)$.
   (b) Sur l'axe imaginaire, la question précédente et l'hypothèse sur f donnent $|h_n(z)| \leqslant 1$. Sur le demi-cercle de rayon R, la question précédente et l'hypothèse de croissance sur f donnent
$$|h_n(z)| \leqslant A^n \exp(nBR^{1-\delta} - mR^{1-\delta/2}),$$
qui est plus petit que 1 pour R assez grand. Le principe du maximum appliqué à h_n sur l'ouvert d'adhérence compacte $\mathring{V} \cap D(0,R)$ donne que pour $|z| \leqslant R$, $|f(z)| \leqslant |\exp(z^{1-\delta/2})|^{1/n}$. À z fixé on fait tendre n vers l'infini et on obtient $|f(z)| \leqslant 1$. Comme R était quelconque, on a le résultat.
3. Supposons par l'absurde qu'elle le soit sur une demi-droite, que l'on peut supposer être $\mathbb{R}_-$, quitte à précomposer f par une rotation. Alors $z \mapsto z^2$ envoie $\mathring{V}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et l'axe imaginaire sur $\mathbb{R}_-$. On peut considérer $g(z) = f(z^2)$ comme fonction sur V. Elle est bornée sur l'axe imaginaire et vérifie $|g(z)| \leqslant A\exp(B|z|^{2\epsilon})$, avec $2\epsilon < 1$. On peut donc appliquer la question précédente à g et conclure que g est bornée sur V, et donc que f est bornée sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Comme f est aussi supposée bornée sur $\mathbb{R}_-$, f est bornée : d'après le théorème de Liouville, elle est nécessairement constante, ce qui est exclu.
4. (a) Notons
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
le développement en série entière de f à l'origine. L'équation satisfaite par f donne que pour tout $n \geqslant 1$
$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}n},$$
d'où par récurrence
$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n! 2^{n(n-1)/2}}$$
pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que f est entière.

(b) On écrit pour $|z| = R$:

$$|f(z) - f(0)| = |\int_0^z f'(\zeta)d\zeta| = |\int_0^z f\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta| \leqslant RM(R/2)$$

(principe du maximum) et donc $|f(z)| \leqslant |f(0)| + |f(z) - f(0)| \leqslant 2RM(R/2)$ (puisque $|f(0)| \leqslant M(R/2) \leqslant RM(R/2)$ si $R \geqslant 1$). Ceci valant pour tout z de module R, on a $M(R) \leqslant 2RM(R/2)$.

(c) La question précédente donne immédiatement que pour tout z

$$|f(z)| \leqslant M(1)|z|^{\log(|z|)/\log(2)} \leqslant A \exp(B|z|^{1/4})$$

pour des constantes A et B bien choisies. On peut donc appliquer à f le résultat de la question 3.

Cet exercice est à comparer avec l'exercice 3 du partiel. Le début de l'exercice est un cas particulier de la méthode de Phragmen-Lindelöf.

Exercice 3

1. D'après le cours, $s \mapsto \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ présentant un pôle simple en 0 et 1. Ainsi (le prolongement de) Ξ ne s'annule pas en 0 et le théorème de factorisation de Hadamard donne (étant donné que Ξ est d'ordre de croissance 1) :

$$\Xi(s) = \exp(A + Bs) \prod_\rho (1 - s/\rho) \exp(s/\rho)\,, \qquad (s \in \mathbb{C})\,.$$

Passant à la dérivée logarithmique :

$$\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)} = B + \sum_\rho \left(\frac{-(1/\rho)}{1 - s/\rho} + \frac{1}{\rho} \right)\,,$$

et le résultat s'en déduit immédiatement.

2. On a de nouveau recours au théorème de factorisation de Hadamard, appliqué cette fois à $1/\Gamma$ (voir le cours). On a

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \exp(\gamma s) s \prod_{n=1}^{\infty} (1 + s/n) \exp(-s/n)\,, \qquad (s \in \mathbb{C})\,.$$

Ainsi $-\Gamma'(s)/\Gamma(s) = \gamma + 1/s + \sum_{n \geqslant 1}((n+s)^{-1} - n^{-1})$. Le résultat se déduit en multipliant par $1/2$ et en remplaçant s par $s/2 + 1$.

3. Il suffit de combiner les questions 1 et 2 et le fait que $s\Gamma(s/2) = \Gamma(s/2 + 1)$. On note aussi que le seul pôle de ζ est 1 et que ses zéros sont la réunion de l'ensemble de ceux de $1/\Gamma(s/2)$ (les entiers pairs négatifs) et de ceux de Ξ (zéros non triviaux de ζ).

4. Pour la première quantité, on utilise la question 2 avec $s = 1$ et l'on obtient $\gamma/2 + \sum_{n \geqslant 1}(1/(2n + 1) - 1/(2n))$. Le second sommant s'écrit $\sum_{n \geqslant 1}((-1)^{n-1}/n) - 1$, et cette quantité vaut $\log 2 - 1$.

   Pour la seconde quantité, on fixe $\operatorname{Re} s > 1$ et l'on remarque que $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$ peut s'écrire $\sum_{n \geqslant 1}(n(n^{-s} - (n + 1)^{-s}))$. Puisque pour $n \geqslant 1$ on a $s \int_n^{n+1} x^{-s-1}\,\mathrm{d}x = n^{-s} - (n+1)^{-s}$, alors $\zeta(s) = s \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\,\mathrm{d}x$. La formule indiquée pour $\zeta(s)$ s'en déduit en écrivant $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. On note $I(s)$ l'intégrale apparaissant dans l'indication et l'on remarque que $I(s)$ tend vers $I(1) = \lim_{N\to\infty}((\log N) - \sum_{n=1}^{N-1}(n(n^{-1} - (n+1)^{-1}))$ lorsque $s \to 1$. La dernière somme apparaissant est équivalente à $-1+\sum_{n=1}^{N} n^{-1}$ lorsque $N \to \infty$. Par définition de γ on obtient donc $I(1) = 1 - \gamma$. En calculant la dérivée logarithmique de $(s/(s-1))(1-(s-1)I(s))$, on trouve que $\lim\limits_{\substack{s\to 1\\ s>1}} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) = 1 - I(1)$. Finalement

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) = \gamma\,.$$

5. On a d'après la question 1 : $\Xi'(0)/\Xi(0) = B$. D'après le cours, la fonction Ξ satisfait l'équation fonctionnelle $\Xi(1-s) = \Xi(s)$ et ainsi $B = -\Xi'(1)/\Xi(1)$. On utilise alors la question 3 et la question 4 pour obtenir :

$$-B = \gamma - \frac{\gamma + \log \pi}{2} + 1 - \log 2\,.$$

Donc $B = -\gamma/2 - 1 + (\log(4\pi))/2$.

6. Pour justifier l'indication, on reprend la formule $\zeta(s) = s/(s-1) - sI(s)$ de la question 4 et l'on justifie (par convergence uniforme de l'intégrale $I(s)$ sur $\operatorname{Re} s \geqslant \delta$, pour tout $\delta > 0$, puis par application du théorème de Morera et enfin par prolongement analytique) que cette formule est en fait valable dès que $\operatorname{Re} s > 0$. On conclut en remarquant que le membre de droite de l'égalité est invariant par conjugaison.

   Fixons maintenant $T > 0$. En regroupant chaque zéro de Ξ (i.e. chaque zéro non trivial de ζ, dont on a vu en cours qu'ils ne sont pas sur l'axe réel) et son conjugué, on a

$$\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leqslant T} \frac{1}{\rho} = \sum_{0 \leqslant \operatorname{Im} \rho < T} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho} = \sum_{\substack{\rho = \sigma + it\\ 0 \leqslant t < T}} \frac{2\sigma}{|\rho|^2}\,.$$

   On a convergence absolue de la série du membre de droite en majorant le module du terme général par $2/|\rho|^2$ (étant donné que Ξ est entière d'ordre 1, un résultat du cours affirme la convergence de la série de terme général $1/|\rho|^2$). On déduit l'existence de la limite considérée.

7. On applique la question 1 combinée à l'équation fonctionnelle $\Xi(1-s) = \Xi(s)$. On obtient :

$$B + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = -B - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)\,.$$

   D'après la question 6 et l'équation fonctionelle pour Ξ, on déduit $B = -\sum_\rho 1/\rho$. Supposons qu'un zéro non trivial $\rho = \sigma + it$ de ζ soit tel que $|t| < 6$, alors, d'aprés l'équation fonctionnelle, on peut supposer $\sigma \geqslant 1/2$. La fonction $x \mapsto x/(x^2 + 36)$ est croissante sur $[1/2, 1]$. En utilisant la question précédente, on écrit

$$-B = \sum_{\rho = \sigma + it} \frac{2\sigma}{\sigma^2 + t^2} > \frac{1}{1/4 + 36} = 4/145 = 0,0275\ldots\,.$$

   C'est absurde d'après la valeur approchée donnée pour B dans l'énoncé.

   En fait, on sait que le zéro non trivial de ζ de partie imaginaire positive minimale est $1/2 + i \times 14,1347\ldots.$

Exercice 4

1. Soit k le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $h^{(k)}(a) \neq 0$. On va montrer que l'angle de $h \circ \gamma_1$ à $h \circ \gamma_2$ en $h(a)$ est k fois l'angle de γ_1 à γ_2 en a. Supposons tout d'abord $k = 1$. Alors d'après les équations de Cauchy-Riemann, la matrice jacobienne de h en a est une matrice de similitude directe inversible, donc elle préserve les angles orientés. Dans le cas général, on peut supposer $h(a) = 0$. Alors au voisinage de a, h s'écrit $h(z) = (z-a)^k g(z)$, avec $g(a) \neq 0$. Sur un disque centré en a assez petit, g ne s'annule pas, donc il existe (simple connexité) H telle que $H^k = g$, i.e. telle que $h(z) = ((z-a)H(z))^k$. La fonction $z \mapsto (z-a)H(z)$ est holomorphe et sa dérivée en a est non nulle, donc elle préserve les angles orientés en a. Il suffit donc de voir comment $z \mapsto z^k$ transforme les angles en 0 : il est clair qu'elle les multiplie par k.

2. (a) L'image d'un point intérieur ne peut pas être un sommet par le théorème de l'image ouverte. Si on choisit un point a d'un côté qui n'est pas un sommet, le côté correspondant forme un angle π en ce point, donc l'image par f des deux segments correspondants forme un angle multiple entier de π en $f(a)$, d'après la question 1 et $f(a)$ n'est donc pas un sommet. Donc la préimage d'un sommet est forcément un sommet ; comme les deux rectangles ont quatre sommets, f induit une bijection entre les sommets.

   (b) Comme on l'a dit ci-dessus, C est inclus dans l'image du bord de R, donc il existe forcément un côté c tel que $f(c) \cap C$ est infini. Quitte à composer f à gauche et à droite par des transformations affines, on peut supposer que c et C sont des segments horizontaux sur l'axe réel. Alors f et $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ sont holomorphes sur R et l'hypothèse que $f(c) \cap C$ est infini se traduit par le fait que ces deux fonctions coïncident en une infinité de points contenus dans un segment : elles sont donc égales, et donc $f(c) \subset C$. Comme les extrémités de C doivent s'envoyer sur celles de C (question précédente), on a $f(c) = C$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

   (c) Notons $c_1, \ldots, c_4$ les côtés de R et $C_1, \ldots, C_4$ leurs images par f, qui sont d'après ce qui précède les côtés de S. Pour $i = 1, \ldots, 4$, on note R_i (resp. S_i) le symétrique de R (resp. S) par rapport à c_i (resp. C_i). Si $z \in R_i$ est symétrique par rapport à c_i d'un point $z' \in R$, on définit $f(z) \in S_i$ comme le symétrique de $f(z')$ par rapport à C_i. En répétant ce processus, on étend f à tout le plan complexe. L'holomorphie du prolongement obtenu s'obtient à l'aide du théorème de Morera comme dans la preuve du principe de réflexion de Schwarz vue en TD. Si $z \in \mathbb{C}$, soit $n_R(z)$ le nombre minimal de réflexions par rapport à un côté que l'on doit faire subir à R pour qu'il contienne z. On voit facilement qu'il existe des constantes A_R, A'_R, B_R, B'_R ne dépendant que de R telles que

   $$|z| \leqslant A_R n_R(z) + B_R \quad ; \quad n_R(z) \leqslant A'_R|z| + B'_R$$

   pour tout z ; de même pour S. Par construction, $n_R(z) = n_S(f(z))$, et donc

   $$|f(z)| \leqslant A_S n_S(f(z)) + B_S = A_S n_R(z) + B_S \leqslant A_S A'_R |z| + A_S B'_R + B_S.$$ [1]

   Il existe donc C, D deux constantes telles que $|f(z)| \leqslant C|z| + D$ pour tout z. On en déduit que f est un polynôme de degré 1 (cf. corrigé de l'exercice 2 du partiel). Par conséquent f est une transformation affine et R et S sont semblables.

1. Justification pénible d'une évidence géométrique !

(d) On prend pour g un biholomorphisme entre $\mathring{R}$ et $\mathring{S}$ donné par le théorème de Riemann. S'il envoyait $R' \subset \mathring{R}$ sur $S' \subset \mathring{S}$, avec R', S' rectangles, d'après la question précédente, g serait affine sur R' donc partout (zéros isolés) ; c'est absurde car R et S ne sont pas semblables, par hypothèse.

3. (a) L'argument donné ci-dessus pour les rectangles pour montrer que f induit une bijection entre les bords, envoyant les sommets sur des sommets, se transpose tel quel. D'après la question 1, chaque angle intérieur du polygone est multiplié par un entier. Or la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$ (pour le voir, subdiviser le polygone en triangles formés en traçant tous les segments reliant un sommet fixé aux autres sommets). Donc cet entier est forcément 1 à chaque fois et les angles internes sont donc les mêmes.

Soit $a \in \mathring{S}$. On vient de voir que f induisait une bijection de ∂R sur ∂S ; en particulier, f ne prend pas la valeur a sur ∂R. Par le principe de l'argument, le nombre de zéros de $f - a$ sur $\mathring{R}$ est

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}d\zeta,$$

et cette quantité est la variation de l'argument de $f-a$ quand on fait le tour de ∂R ; comme $f : \partial R \to \partial S$ est une bijection, cet entier est 1. Par conséquent, f prend la valeur a exactement une fois sur $\mathring{R}$ et est donc une bijection holomorphe de $\mathring{R}$ sur $\mathring{S}$. Une remarque en passant : on vient de prouver qu'une fonction holomorphe envoyant un polygone sur un polygone induit un biholomorphisme entre les intérieurs. C'est complètement faux si on remplace les polygones par des disques (exemple : le disque unité et $z \mapsto z^n$). La présence de singularités, à savoir les sommets, rend la situation suffisamment "rigide".

(b) Les angles des deux triangles sont les mêmes comme on l'a vu ci-dessus, donc ils sont semblables : on peut trouver g affine qui donne un biholomorphisme entre les deux et choisir g (dans le cas où il y a plusieurs cas possibles, i.e. si les triangles sont équilatéraux) de sorte $g^{-1} \circ f$ soit un biholomorphisme du triangle $\mathring{R}$ avec trois points fixes (les sommets) au bord. Le théorème de Riemann et le fait admis montrent que cela correspondrait à un automorphisme du disque unité avec trois points fixes au bord : on sait que c'est forcément l'identité. Donc $f = g$ est affine.

Exercice 5

Fixons z_1. Alors $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ est holomorphe sur la couronne $C = \{z_2, 1/2 < |z_2| < 1\}$, donc admet un développement de Laurent

$$\forall z_2 \in C,\ f(z_1, z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_1) z_2^n,$$

avec pour tout n,

$$c_n(z_1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=3/4}\frac{f(z_1,\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

Pour tout ζ tel que $|\zeta| = 3/4 > 1/2$, $z_1 \mapsto f(z_1, \zeta)$ est holomorphe donc par Morera, $z_1 \mapsto c_n(z_1)$ est une fonction holomorphe de z_1. Or, si $|z_1| > 1/2$, $\zeta \mapsto f(z_1, \zeta)$ est holomorphe sur tout le disque $|\zeta| \leqslant 3/4$, donc $c_n(z_1) = 0$ pour $n < 0$. Comme c_n est holomorphe, on a donc $c_n(z_1) = 0$ pour tout $|z_1| < 1$ et tout $n < 0$. Autrement dit,

$$\forall z_1,\ \forall z_2 \in C,\ f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1) z_2^n.$$

Le membre de droite définit un prolongement holomorphe de f à U.

Le résultat démontré dans cet exercice est le théorème d'extension de Hartogs. Il montre que la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables est très différente de celle des fonctions holomorphes d'une variable (penser au disque épointé dans $\mathbb{C}$!).