a) $\mathcal{O}_X$-modules, faisceaux quasicohérents et cohérents

Passages en jaune = facultatifs

Def : $(X, \mathcal{O}_X)$ espace annelé.

Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ sur X est un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$, avec morphisme de faisceaux abéliens $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tq $\forall U \subseteq X$ ouvert, $\mathcal{F}(U)$ soit un $\mathcal{O}_X(U)$-module.

(les morphismes de restriction préservent automatiqt la structure de mod, par l'hyp $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ morphisme de faisceaux.)

Un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules est un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tq $\forall U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$-mod.

Catégorie obtenue : $\mathcal{O}_X$-Mod.

Soit A anneau (commutatif), M A-module. On lui associe un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\widetilde{M}$ sur $X = \mathrm{Spec}(A)$, tq $\forall f \in A$, le A_f-module $\widetilde{M}(D(f))$ est M_f.

(en particulier $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.)

Le foncteur $\begin{array}{ccc} A\text{-mod} & \to & \mathcal{O}_X\text{-Mod} \\ M & \mapsto & \widetilde{M} \end{array}$ est exact et pleinement fidèle.

Def/Prop : X schéma. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ est quasicohérent si l'on a un recouvrement (U_i), $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ et pour tout i un A_i-module M_i tq $\mathcal{F}_{|U_i} \simeq \widetilde{M_i}$.

$\iff \forall U \subseteq X, U = \mathrm{Spec}(A)$, $\exists$ A-mod M tq $\mathcal{F}_{|U} = \widetilde{M}$.

Catégorie obtenue notée $\mathrm{QCoh}(X)$.

[En particulier, pour $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine,

les foncteurs $M \mapsto \tilde{M}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ sont des équiv. quasi-inverses l'une de l'autre entre A-Mod et $Q\mathrm{Coh}(X)$.]

Si X est de plus supposé noethérien, et que dans la situation ci-dessus, M_i est un A_i-module de t.f. pour tout i, $\mathcal{F}$ est dit <u>cohérent</u>.

Sous-catégorie pleine dénotée $\mathrm{Coh}(X)$.

Les catégories $\mathcal{O}_X$-Mod, $Q\mathrm{Coh}(X)$, $\mathrm{Coh}(X)$ (X noethérien) sont des catégories abéliennes.

[<u>Rappel</u> : Une catégorie $\mathcal{C}$ est <u>abélienne</u> si elle est <u>pointée</u> ($\exists$ objet zéro), si produits et coproduits finis existent et sont isomorphes, si $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ avec sa structure naturelle de monoïde (donnée par 0, et $X \sqcup X \simeq X \times X$) est un groupe abélien (deux derniers axiomes = additive) et enfin si $\forall f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$,

$$\ker(f) = \lim \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{coker}(f) = \mathrm{colim} \left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array} \right)$$

existent et la flèche naturelle

$$\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f) \to X) \to \ker(Y \to \mathrm{coker}(f)) = \mathrm{im}(f)$$

est un isomorphisme. Ex: modules over a ring, ab sheaves on a site
non-ex: projective modules over a ring (in general)]

b) Opérations

1) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-modules. On note $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ le $\mathcal{O}_X$-module associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont quasi-cohérents, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ aussi. En fait, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\underbrace{\mathcal{G} = \tilde{N}}$, on a

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = M \otimes_A N$$ (dans ce cas, pas besoin de faisceautiser !)

Idem pour cohérents, lorsque X noethérien.

2) $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{O}_X$-Mod. Le préfaisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

$$X \supseteq U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

[⚠ $\neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$]

est un faisceau de $\mathcal{O}_X$ modules.

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{QCoh}(X)$, $U = \mathrm{Spec}(A) \subseteq X$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$$

(en dépit de l'avertissement précédent...)

Mais $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ n'est pas en général quasi-cohérent.

C'est vrai toutefois si $\mathcal{F}$ est de présentation finie.

[OPS $X = \mathrm{Spec}(A)$. Pour $f \in A$ on veut

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})[\tfrac{1}{f}] \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|D(f)}}(\mathcal{F}|_{D(f)}, \mathcal{G}|_{D(f)})$$

ie $\mathrm{Hom}_A(M, N)[\tfrac{1}{f}] \simeq \mathrm{Hom}_{A[\frac{1}{f}]}(M[\tfrac{1}{f}], N[\tfrac{1}{f}])$ ...]

Contre-exemple : Prendre $A = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$, $M = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$.

Adjonction : $\forall \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{O}_X$-Mod,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

3) $f : X \to Y$ morphisme de schémas.

- $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X$-Mod. Alors $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module (naturellement $f_*\mathcal{O}_X$-mod, puis $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$)
- $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y$-Mod. $f^{-1}\mathcal{G}$ est un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module. On pose
$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \in \mathcal{O}_X\text{-Mod}.$$

Adjonction : $\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{O}_X$-Mod,
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Prop : 1) Si $\mathcal{G} \in QCoh(Y)$, $f^*\mathcal{G} \in QCoh(X)$.
Loc^t, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{G} = \widetilde{M}$, $M \in A$-Mod
$$f^*\mathcal{G} = \widetilde{M \otimes_A B}.$$
2) f qcqs, $\mathcal{F} \in QCoh(X)$, alors $f_*\mathcal{F} \in QCoh(Y)$

Dém : Pour 1), local sur Y et sur X, donc on se ramène au cas affine.
Pour 2), seulement local sur Y.
$Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \bigcup_{i \in \text{finie}} \mathrm{Spec}(B_i)$.
$$\mathrm{Spec}(B_i) \cap \mathrm{Spec}(B_j) = \bigcup_{k \in I_{ij}} \mathrm{Spec}(B_{ijk}).$$
$M = (f_*\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(X)$. On a un morphisme
$$\phi : \widetilde{M} \to f_*\mathcal{F}$$
$$\forall f \in A, \quad \phi(D(f)) : M[\tfrac{1}{f}] \to (f_*\mathcal{F})(D(g)).$$
$$M = \mathcal{F}(X) = eq\left(\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j,k \in I_{ij}} \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, B_{i,j,k})\right)$$

Ensembles d'indices finis $\Rightarrow \prod = \bigoplus$.
Localisation est exacte et commute aux $\bigoplus$, donc

$$M[\tfrac{1}{f}] = \mathrm{eq}\Big(\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{Spec} B_i)[\tfrac{1}{f}] \rightrightarrows \prod_{i,j,k\in I_{ij}} \mathcal{F}(\mathrm{Spec} B_{ijk})[\tfrac{1}{f}]\Big)$$

$$\overset{\mathcal{F}\text{ qcoh}}{=} \mathrm{eq}\Big(\prod_i \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(B_i[\tfrac{1}{f}])) \rightrightarrows \prod_{i,j,k\in I_{ij}} \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(B_{ijk}[\tfrac{1}{f}]))\Big)$$

$$= \mathcal{F}(f^{-1}(D(g))) = f_*\mathcal{F}(D(g)).$$ $\square$

<u>Rk</u> : 2) faux si qcoh est remplacé par coh !

c) Foncteurs dérivés

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on peut définir sa catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ (en localisant pour les quasi-isomorphismes la catégorie homotopique $K(A)$ de A dont les objets sont les complexes d'objets de $\mathcal{A}$ et les morphismes les morphismes de complexes modulo ceux homotopes à 0).

Si $F : A \to \mathcal{B}$ foncteur additif entre cat. abéliennes, F ne transforme pas les quasi-iso en quasi-iso, à moins d'être exact. Néanmoins, si F exact à gauche et $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, on peut étendre F en

$$RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B}).$$

en posant $RF = D^+(A) \xleftarrow{\sim} K^+(\mathrm{Inj}_A) \to K^+(\mathcal{B}) \to D^+(\mathcal{B})$.
(avec des mots : on remplace un complexe par un complexe d'injectifs quasi-iso et on applique F terme à terme)

<u>Rq</u> : idem avec projectifs pour les foncteurs exacts à droite.

Pour $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exact à gauche, on pose pour $i \geq 0$
$$R^iF(-) = H^i(RF(-)).$$

La catégorie $\mathcal{O}_X$-Mod a suffisamment d'injectifs. On peut donc définir les foncteurs dérivés des foncteurs précédemment introduits.

1) Si $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X$-Mod, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathrm{Ab}$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-Mod}$$
sont exacts à gauche.
Foncteurs dérivés $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}$, $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}$, $i \geq 0$.

Rq : a) Si $U \subseteq X$ ouvert, on a :
$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_{|U} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$$
(pt clé : si $\mathcal{I} \in \mathcal{O}_X$-Mod injectif, $\mathcal{I}_{|U} \in \mathcal{O}_U$-Mod aussi injectif)

b) Si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{O}_X$-Mod, $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_X\text{-Mod})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i]) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$

(Cette formule permettrait de définir Ext^i dans une cat. ab. n'ayant pas suffisamment d'injectifs)

$\Rightarrow$ accouplement naturel, $\forall \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{O}_X$-Mod
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}).$$

c) Si la catégorie $\mathcal{A}$ a suffisamment de projectifs, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-, X)$, $X \in \mathcal{A}$, est aussi le i-ème foncteur dérivé à droite de $\mathcal{A}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)]{} \mathrm{Ab}$.
Pour X schéma, $\mathcal{O}_X$ n'a pas en général assez de projectifs, mais ok si X affine.

d En utilisant a) et cas $i=0$, on montre que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ est qcoh (resp. coh) si $\mathcal{F}$ est coh et $\mathcal{G}$ qcoh (resp. $\mathcal{G}$ coh.).

2) $f: X \to Y$, $f_*: \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ exact à gauche

Foncteurs dérivés $R^i f_*$, $i \geq 0$.

<u>Fait</u> : Pour tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$, $R^i f_* \mathcal{F}$ est le faisceautisé de $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F}_{|f^{-1}(U)})$.

<u>Fait</u> : On peut indifféremment dériver f_* vu comme foncteur $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$, $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \to Ab_Y$, $Ab_X \to Ab_Y$. Pt clé : si $\mathcal{I}$ injectif ds $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, $\mathcal{I}$ flasque $\Rightarrow$ acyclique vu comme faisceau ab.

<u>Rq</u> : Il est vrai mais non trivial que $QCoh(X)$ a assez d'injectifs. Mais les foncteurs dérivés de $f_*: QCoh(X) \to Ab_Y$ ne coïncident pas nécessairement avec les précédents restreints à $QCoh(X)$. Cela vient du fait qu'un faisceau qcoh injectif n'est pas nécessairement flasque (la preuve ci-dessus utilise $j_!: \mathcal{O}_U\text{-Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, qui ne préserve pas QCoh). On ne les considère jamais.

<u>Prop</u> : $f: X \to Y$ qcqs, $\mathcal{F} \in QCoh(X)$. Alors $R^i f_* \mathcal{F}$ est quasicohérent $\forall i \geq 0$, et $\forall\, V = Spec(B) \subseteq Y$ ouvert affine avec $U = f^{-1}(V) \subseteq X$, $(R^i f_* \mathcal{F})(V) = H^i(U, \mathcal{F})$.

(Dans ce cas, pas besoin de faisceautiser !)

<u>Rq</u> : La preuve est essentiellement la m̂ que dans le cas non-dérivé, avec des complexes de Čech.

Cas particulier d'un énoncé plus général : changement de base qcqs.

Th. $f : X \to Y$ morphisme propre entre schémas noeth., $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$. Alors $R^i f_* \mathcal{F}$ cohérent $\forall i \geq 0$.

<u>Idée de preuve</u> : Par la prop précédente, on sait déjà que $R^i f_* \mathcal{F}$ est qcoh, on peut donc supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine. On veut mq $H^i(X, \mathcal{F})$ est un A-module de t.f.

Le lemme de Chow permet de se ramener au cas projectif i.e. $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_A$. Quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par $i_* \mathcal{F}$, on pourrait donc supposer $X = \mathbb{P}^n_A$ et raisonner par récurrence descendante sur i, en utilisant le calcul des $H^k(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(d))$.

Autre argument, dans le cas particulier $A = \mathbb{C}$, X var. alg. projective $/\mathbb{C}$: on applique GAGA de Serre pour réécrire $\forall i \geq 0$

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X^{an}, \mathcal{F}^{an}).$$

On peut recouvrir X^{an} par des <u>ouverts Stein</u> (analogues des affines en géométrie analytiques complexes). Comme X^{an} est compact, on peut prendre des recouvrements finis. Choisissons en deux $(U_j)_{j \in I}, (V_j)_{j \in I}$, avec un ensemble d'indices fini I, et de sorte que : $\forall j \in I, \overline{U_j} \subseteq V_j$.

Pour tout ouvert Stein U de X, tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Fréchet (loc. convexe, métrisable, complet).

[topologie quotient induite par une présentation

$$0 \to K \to \mathcal{O}_{X^{an}}^n \to \mathcal{F} \to 0 \quad]$$

De plus, $j \in I$, $V_j, \mathcal{F} \longrightarrow {}_j, \mathcal{F}$ comme
et compacte (conséquence du th. de Montel)

Idem pour V_J, U_J, pour tout $J \subseteq I$ $\left(U_J = \bigcap_{j \in J} U_j, \ldots\right)$

Pour tout $i \geq 0$, notons $C^i((U_j), \mathcal{F})$ le i-ème terme du complexe de Čech associé au recouvrement (U_j). Notons aussi :

$$Z^i((U_j), \mathcal{F}) = \ker\left(C^i((U_j), \mathcal{F}) \xrightarrow{d^{i,i}} C^{i+1}((U_j), \mathcal{F})\right)$$

$$H^i((U_j), \mathcal{F}) = i\text{-ème groupe de coh.}$$

Idem pour (V_j). Par restriction, on a une flèche continue

$$H^i((V_j)_{j \in I}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i((U_j)_{j \in I}, \mathcal{F})$$

qui est un iso car les deux membres sont iso à $H^i(X^{an}, \mathcal{F})$ (acyclicité des Stein).

Pour conclure, considérons :

$$Z^i((V_j), \mathcal{F}) \oplus C^{i-1}((U_j), \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{res} \oplus d^{i-1}} Z^i((U_j), \mathcal{F})$$

Par les considérations qui précèdent, cette application continue est surjective. En outre, res est compacte, comme vu plus haut. Donc d^{i-1} est obtenue en perturbant un opérateur surjectif par un opérateur compact. Par un théorème d'analyse fonctionnelle, le conoyau d'une telle perturbation est de dim $< \infty$. Donc

$$H^i((U_j), \mathcal{F}) = H^i(X^{an}, \mathcal{F}) \text{ est de dim } < \infty,$$

comme voulu. $\square$

d) Dualité de Serre

<u>Th</u> : Soit X schéma projectif lisse de dim n sur un corps k. Notons $\omega_X = \Lambda^n \Omega^1_{X/k}$. Il existe une application trace canonique
$$tr : H^n(X, \omega_X) \to k \qquad \text{t.q.}$$
pour tout $\mathcal{F} \in Coh(X)$, l'accouplement
$$H^i(X,\mathcal{F}) \underset{k}{\otimes} Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \to H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{tr} k$$
soit un accouplement parfait, $\forall i \geq 0$.

<u>Ex</u> : $X = \mathbb{P}^n_k$. $\omega_X = \mathcal{O}(-n-1)$

$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(r)) = 0$ si $\begin{matrix} 0<i<n \\ r \in \mathbb{Z} \end{matrix}$, $H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-n-1)) \simeq k$.

<u>Rq</u> : Lorsque $\dim(X) = 1$, Tate en a donné une très jolie preuve élémentaire, cf. "Residues of differentials on curves". Pour le th. ci-dessus, cf. Hartshorne.

<u>Idée de construction de l'application tr, en dim 1</u> :

Supposons $k = \mathbb{C}$, X courbe projective lisse.

<u>Fait</u> : L'application $\mathbb{C}((z))\,dz \to \mathbb{C}$, qui envoie $\sum_{n \gg -\infty} a_n z^n$ sur a_{-1}, est invariante par les automorphismes de $\mathbb{C}((z))$.

En effet, si la série de Laurent converge sur un petit voisinage de 0, c'est vrai par le théorème de Cauchy qui exprime le résidu comme intégrale sur un petit cercle autour de 0. Les résidus convergents sont denses.

Choisissons $x, y \in X$. Alors $U = X \setminus \{x\}$ et $V = X \setminus \{y\}$ sont affines : $U = \mathrm{Spec}(A)$, $V = \mathrm{Spec}(B)$. Alors :

$$H^1(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}}) = \mathrm{coker}\left(\Omega^1_{A/\mathbb{C}} \oplus \Omega^1_{B/\mathbb{C}} \to \Omega^1_{D/\mathbb{C}}\right)$$

(on écrit $U \cap V = \mathrm{Spec}(D)$).

Comme X est lisse, on a par ce qui précède deux applications bien définies $\mathrm{res}_x, \mathrm{res}_y : \Omega^1_{D/\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

<u>Lemme</u> : $\mathrm{res}_x + \mathrm{res}_y = 0$

<u>Dém</u>: On choisit un point $z \in X(\mathbb{C})$ et un petit cercle autour de z de contour γ, qui ne contienne ni x ni y. Soit $\omega \in \Omega^1_{D/\mathbb{C}}$. Alors $\int_\gamma \omega = 0$ (pas de pôles dans le cercle bordé par γ).

En changeant l'orientation, $-\int_\gamma \omega = 2i\pi(\mathrm{res}_x + \mathrm{res}_y)$.

<u>Cor</u> : L'application $\mathrm{res}_x : \Omega^1_{D/\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est nulle sur l'image de $\Omega^1_{A/\mathbb{C}} \oplus \Omega^1_{B/\mathbb{C}}$, et fournit donc

$$H^1(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}.$$

<u>Idée de la preuve, cas général</u> :

- On commence par traiter le cas $X = \mathbb{P}^n_k$. Se réduit à des calculs explicites.
- En général, on a par hypothèse $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^m_k$. On sait que $\mathrm{Ext}^j_{\mathbb{P}^m}(i_*\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^m}) \times \underbrace{H^{m-j}(\mathbb{P}^m, i_*\mathcal{F})}_{H^{m-j}(X, \mathcal{F})} \to k$ accouplement parfait, donc il faut identifier

$$\mathrm{Ext}^{j+m-n}_{\mathbb{P}^m}(i_*\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^m}) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Ext}^j_X(\mathcal{F}, \omega_X).$$

Par cela, on montre : $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\mathbb{P}^m}(i_* \mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^m}) \simeq \begin{cases} \omega_X & q = m-n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Grothendieck a obtenu des généralisations de l'énoncé précédent. Par exemple :

Si $X \to S = \mathrm{Spec}(R)$ morphisme propre et lisse entre schémas noethériens, alors il existe une application canonique

$$R\Gamma(X, \underset{\Lambda^n \Omega^1_{X/S}}{\underset{\parallel}{\omega_{X/S}}})[n] \longrightarrow R$$

tq $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}(X)$,

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S})[n] \longrightarrow R\mathrm{Hom}_R(R\Gamma(X,\mathcal{F}), R)$$

soit un isomorphisme dans $D(R)$.

On aimerait toutefois se débarrasser des hypothèses restrictives ci-dessus (propre, lisse, noethérien). C'est en essayant de comprendre comment que Grothendieck a été amené (à introduire les catégories dérivées et) à conjecturer l'existence d'un "formalisme des six foncteurs" dans ce cadre.

(cf. exposé de Grothendieck à l'ICM 1958 ou les "pré-notes" du séminaire Hartshorne)