Espaces adiques discrets

Soit $R \xrightarrow{f} A$ un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres de t.f.

$\leftrightarrow$ $f : X = \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$.

Nous avons défini un foncteur

$$f_! : D(A_\bullet) \longrightarrow D(R_\bullet)$$

comme composé $f_! = g_* \circ j_!$,

avec $j_! : D(A_\bullet) \to D((A,R)_\bullet)$ adjoint à gauche de $j^* = - \otimes_{(A,R)_\bullet} A_\bullet$

et $g_* : D((A,R)_\bullet) \to D(R_\bullet)$ foncteur oubli.

Rappelons que pour un hypothétique formalisme des six foncteurs quasi-cohérent, pour $f : X \to Y$, si f se factorise $f : X \xrightarrow{j} \bar{X}^Y \xrightarrow{g} Y$ avec j immersion ouverte et g morphisme propre, on devrait avoir :

$$f_! = g_* \circ j_!$$

adjoint à gauche de j^*

local sur $\bar{X}^Y$, foncteur oubli

On aimerait donc bien pouvoir définir, pour (A,R) comme ci-dessus, un espace "$\mathrm{Spec}((A,R)_\bullet)$" contravariant en $(A,R)_\bullet$ de sorte que dans le diagramme

$$\text{"}\mathrm{Spec}(A_0)\text{"} \xrightarrow[j]{} \text{"}\mathrm{Spec}((A,R)_0)\text{"} \xrightarrow[g]{} \text{"}\mathrm{Spec}(R_0)\text{"},$$

j soit une immersion ouverte et g un morphisme propre.

Pour deviner comment définir "$\mathrm{Spec}((A,R)_0)$", rappelons le critère valuatif de propreté.

<u>Déf</u> : Un <u>anneau de valuation</u> est un anneau V intègre, de corps des fractions K, tq $\forall x \in K^\times$, soit $x \in V$ soit $x^{-1} \in V$.
(autrement dit pour tout $a, b \in V - \{0\}$, soit a divise b soit b divise a).

Si V est un anneau de valuation, de corps des fractions K,
$$\Gamma_V := K^\times / V^\times$$ est un groupe abélien totalement ordonné pour l'ordre $aV^\times \leq bV^\times$ si $\frac{a}{b} \in V$. On a une flèche de réduction
$$v : K \to \Gamma_V \cup \{0\}$$
$$a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ aV^\times & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si K est un corps, et que l'on se donne une <u>valuation</u> $v : K \to \Gamma \cup \{0\}$, Γ groupe abélien totalement ordonné, i.e. une application tq
$$v(0) = 0,\ v(1) = 1,\ v(ab) = v(a)v(b),\ v(a+b) \leq \max(v(a), v(b))$$
$\forall a, b \in K$ (on a posé $0 \cdot 0 = 0$, $\gamma \cdot 0 = 0$ $\forall \gamma \in \Gamma$, $0 < \gamma$ $\forall \gamma \in \Gamma$)

alors $V := \{x \in K, v(x) \leq 1\}$ est un anneau de valuation (avec $V^\times = \{x \in K, v(x) = 1\}$)

<u>Prop</u> (critère valuatif de propreté) (Hartshorne II 4.7)

Soit $f : X \to Y$ morphisme de schémas de t.f quasi-sép.

S'équivalent :

(1) f est propre (= séparé, universellement fermé)

(2) Pour tout diagramme commutatif solide

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(V) \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

V anneau de valuation de corps des fractions K

il existe une unique flèche pointillée faisant commuter le diagramme. <u>Rq</u> : séparé $\Leftrightarrow$ $\exists$ au plus une.

On aimerait, cf. ci-dessus, que le morphisme

"$\mathrm{Spec}((A,R)_0)$" $\to$ "$\mathrm{Spec}(R_0)$" soit propre.

On aimerait aussi que $R \mapsto$ "$\mathrm{Spec}(R_0)$" soit pleinement fidèle. Il est donc naturel de définir l'ensemble sous-jacent à "$\mathrm{Spec}((A,R)_0)$" comme l'ensemble des morphismes $A \to K$, K corps, envoyant R dans V, anneau de valuation de corps des fractions K, à équivalence près.

Pour une définition en forme, on va utiliser la notion de valuation plutôt que celle d'anneau de valuation (c'est un choix indifférent, par ce qu'on a dit plus haut) :

Déf : Soit (A, A^+) une "paire de Huber discrète", i.e. un anneau (discret) A et $A^+ \subseteq A$ sous-anneau. On note $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ l'ensemble des classes d'équivalence de valuations $v : A \to \Gamma \cup \{0\}$ t.q. $v(A^+) \leq 1$. On le munit de la topologie engendrée par les ouverts de la forme
$$U_{f,g} := \{v,\ v(f) \leq v(g) \neq 0\},\quad f, g \in A.$$
(classes d'équivalence de valuations : $v \sim v'$ si ($\forall f, g \in A$, $v(f) \leq v(g) \Leftrightarrow v'(f) \leq v'(g)$) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{supp}(v) = \mathrm{supp}(v')$ et mêmes anneaux de valuation dans le corps résiduel de celui-ci. Autrement dit, se donner une valuation sur A à équivalence près, c'est se donner un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et un anneau de valuation V dans $k(\mathfrak{p})$ avec $k(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(V)$.)

Rq : On ne change pas l'espace topologique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ si l'on remplace A^+ par sa clôture intégrale dans A.

De même, notons que l'anneau analytique $(A, R)_\bullet$ ne dépend que de l'image de R dans A, et même que de la clôture intégrale de celle-ci, que l'on notera A^+. En effet, A^+ est finie sur R (car R et A sont des $\mathbb{Z}$-algèbres de t.f.) donc, comme précédemment,

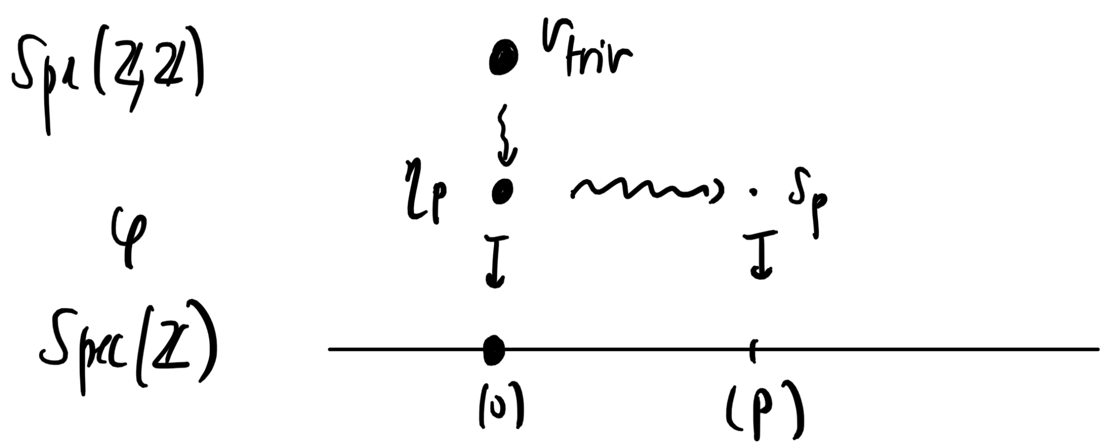
$\forall$ ensemble I, $\prod_I R \otimes_R A^+ = \prod_I A^+$, d'où $\prod_I R \otimes_R A = \prod_I A^+ \otimes_{A^+} A$

d'où $(A, R)_\bullet = (A, A^+)_\bullet$.

Cela s'accorde à l'idée que l'espace $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est "associé" à l'anneau analytique (A, A^+), plutôt qu'à la paire (A, A^+) elle-même.

Rq : (Visualiser la topologie sur $\mathrm{Spa}(A, A^+)$)
L'application
$$\varphi : \mathrm{Spa}(A, A^+) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$
$$v \longmapsto \mathfrak{p}_v = \mathrm{supp}(v)$$
est continue : si $f \in A$, $D(f) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ ouvert,
$$\varphi^{-1}(D(f)) = \{ v \in \mathrm{Spa}(A, A^+),\ v(f) \neq 0 \}$$
$$= \{ v \in \mathrm{Spa}(A, A^+),\ v(0) \leq v(f) \neq 0 \} = U_{0,f}.$$
fibres = "espaces de Zariski-Riemann".

Ex :



$v_{triv} : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$
$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

η_p = norme p-adique
s_p = composition de $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ et val. triv. sur $\mathbb{F}_p$

Rq : On a aussi
$$\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Spa}(A, A^+)$$
$$\mathfrak{p} \longmapsto \left(v_{\mathfrak{p}} : A \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{triv} \{0, 1\}\right)$$
Si $f \in A$, $\psi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{g_i, f}\right) = D(f)$. ψ est une section de φ
$g_1, \dots, g_n \in A$ (qui est donc surjective).

Spécialisations :

Soit A un anneau et v, v' deux valuations sur A. Il est utile de garder en tête le fait suivant : $v' \in \overline{\{v\}}$ ssi $\forall f, g \in A$
$$(v'(f) \leq v'(g) \neq 0) \Rightarrow (v(f) \leq v(g) \neq 0) \quad \text{(facile !)}$$

Soit A anneau, v, v' deux valuations sur A.

<u>Déf.</u> On dit que v est une <u>spécialisation verticale</u> de v' si $v \in \overline{\{v'\}}$ et $\mathrm{supp}(v) = \mathrm{supp}(v')$. ($v, v'$ dans la même fibre de φ)

<u>Fait</u> : On a une bijection préservant l'ordre, pour v fixée :
$$\left\{\begin{array}{c}\text{généralisations verticales}\\ \text{de } v\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{sous-groupes convexes}\\ \text{de } \Gamma_v\end{array}\right\}$$
(ordre : spécialisation) (ordre : inclusion)
$$v' \longmapsto \ker(\Gamma_v \to \Gamma_{v'}) =: H_{v'}.$$

v' est de la forme
$$v' : A \to \Gamma_v / H_{v'} \cup \{0\}$$
$$f \mapsto \begin{cases} v(f) \bmod H_{v'} & \text{si } v(f) \neq 0 \\ 0 & \text{si } v(f) = 0. \end{cases}$$

<u>Déf.</u> On dit que v est une <u>spécialisation horizontale</u> de v' si v est de la forme
$$v' : A \to \Gamma_v \cup \{0\}$$
$$f \mapsto \begin{cases} v(f) & \text{si } f \in H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad H \text{ sous-groupe}$$
(il y a des conditions sur H pour que ce soit bien une valuation...)

<u>Fait</u> : Toute spécialisation dans $\mathrm{Spa}(A, \mathbb{Z})$ peut être obtenue comme composée d'une spécialisation verticale et horizontale (dans l'ordre qu'on voudra).

Encore un exemple :

__Ex__ : $A = \mathbb{Z}[T]$.

- Valuations de rang 0 : $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $v_{\mathfrak{p}} : A \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\text{triv}} \{0,1\}$.

  Si $\mathfrak{p} = (0)$, point générique.

- Soit $0<\gamma<1$, définissons $v_T : f \mapsto \gamma^{\mathrm{ord}_0(f)}$.

  C'est une généralisation verticale de $v_{(T)}$.

- p premier, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, définissons $v_{p,r} : \underset{= \sum a_n T^n}{f} \mapsto \max_n \{|a_n|_p r^n\}$.

Cette valuation a la spécialisation horizontale : valuation triviale de noyau $\{f \in A,\ v_{p,r}(f) < 1\}$, notée $v'_{p,r}$.

On a :

$$\begin{tikzcd} & v_{p,1} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & v'_{p,1} \arrow[d, squiggly] & \text{noyau } pA \arrow[l] \\ \text{déf ci-dessous} \arrow[r] & v_{p,1^-} \arrow[r, squiggly] & \text{valuation } T\text{-adique modulo } p. & \end{tikzcd}$$

- Soit $\Gamma = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique : $(r, n) < (r', m) \iff r < r'$ ou $r = r', m < n$.

Si l'on plonge $\mathbb{R}_{>0}$ dans Γ par $r \mapsto (r, 1)$, alors $\gamma_0 := (1, 1)$ vérifie $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, r < 1,\ r < \gamma_0 < 1$.

Pour $r \in \mathbb{R}_{>0}$, p premier, on pose : $v_{p,r^-} : f = \sum a_n T^n \mapsto \max |a_n|_p (r\gamma_0)^n$.

C'est une spécialisation verticale de $v_{p,r}$. De manière analogue, on pourrait définir v_{p,r^+} (remplacer $m<n$ par $m>n$ ci-dessus).

Notons que $v_{p,1^+} \in \mathrm{Spa}(A, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Spa}(A, A)$.

Rôle de A^+ :

<u>Lemme</u> : Soit A un anneau. On a bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sous-anneaux int-clos} \\ A^+ \subseteq A \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-ensembles } U \subseteq \mathrm{Spa}(A,\mathbb{Z}) \\ \text{intersection d'ouverts de} \\ \text{la forme } U_{1,f} \end{array} \right\}$$

$$A^+ \longmapsto U = \mathrm{Spa}(A, A^+) = \{ v \in \mathrm{Spa}(A,\mathbb{Z}), \ \forall f \in A^+, v(f) \leq 1 \} = \bigcap_{f \in A^+} U_{1,f}$$

$$A^+ = \{ f \in A, \ \forall v \in U, \ v(f) \leq 1 \} \longleftarrow U$$

(En particulier, $A^+ = \{ f \in A, \forall v \in \mathrm{Spa}(A, A^+), v(f) \leq 1 \}$.)

<u>Dém</u> : Il est clair que pour tout U, $A^+ = \{ f \in A, \forall v \in U, v(f) \leq 1 \}$ est int-clos. Par déf, $A^+ \mapsto U$ est surjective. (prendre pour A^+ la clôture intégrale du sous-anneau engendré par les $f \in I$ si $U = \bigcap_{f \in I} U_{1,f}$).

Mq $A^+ = \{ f \in A, \forall v \in \mathrm{Spa}(A, A^+), v(f) \leq 1 \}$.

Si $f \notin A^+$, $f \notin A^+[\frac{1}{f}] \subseteq A[\frac{1}{f}]$ (sinon $f \in A^+$ qui est int-clos). Donc on peut trouver $\mathfrak{p}$ idéal premier de $A^+[\frac{1}{f}]$ contenant $\frac{1}{f}$. Soit $\mathfrak{q}$ idéal premier minimal de $A^+[\frac{1}{f}]$ contenu dans $\mathfrak{p}$.

<u>Fait</u> : Il existe un anneau de valuation V avec un morphisme

$\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(A^+[\frac{1}{f}])$ envoyant point générique sur q et le point fermé sur p.

<u>Dém</u> : Notons tout d'abord que q est dans l'image du morphisme $\mathrm{Spec}(A^+[\frac{1}{f}]_p) \to \mathrm{Spec}(A^+[\frac{1}{f}])$. On a donc un morphisme

$$A^+[\tfrac{1}{f}]_p \to k(q)$$

Il nous suffit de trouver un anneau de valuation $V \subseteq k(q)$ contenant l'image de $A^+[\frac{1}{f}]_p$. Hartshorne II.4.4 ou Stacks Project Tag 00IA. ∎ (Fait)

L'image de $\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{f}]) \to \mathrm{Spec}(A^+[\frac{1}{f}])$ contient q : localisons $A[\frac{1}{f}]$ et $A^+[\frac{1}{f}]$ en q. La localisation étant exacte,

$$\text{corps} \to A^+[\tfrac{1}{f}]_q \hookrightarrow A[\tfrac{1}{f}] \otimes_{A^+[\frac{1}{f}]} A^+[\tfrac{1}{f}]_q .$$

Soit q' idéal premier de RHS. Alors $q' \cap A^+[\frac{1}{f}]_q = (0)$ et donc l'image inverse q'' de q' dans $A[\frac{1}{f}]$ vérifie $q'' \cap A^+[\frac{1}{f}] = q$, ce qui prouve l'assertion.

Par conséquent, on peut relever la valuation correspondant à $\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(A^+[\frac{1}{f}])$ à $A[\frac{1}{f}]$. Cette valuation v sera à valeurs ≤ 1 sur $A^+[\frac{1}{f}]$ et donc forcément puisque $v(\frac{1}{f}) < 1$ (car $\frac{1}{f} \in p$), $v(f) > 1$. Donc f n'appartient pas à $\{g \in A, \forall v \in \mathrm{Spa}(A,A^+), v(g) \leq 1\}$. Par conséquent, on a montré que

$$A^+ \supseteq \{f \in A, \forall v \in \mathrm{Spa}(A,A^+), v(f) \leq 1\}.$$

L'inclusion réciproque est triviale. ∎

(Lemme)

Proposition 1 : Soit $(A, A^+) \to (B, B^+)$ morphisme de paires de Huber discrètes, tel que
$$\mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$$
se factorise par l'ouvert $U = \bigcap_{i=1}^n U_{g_i, f}$ $\left(\begin{smallmatrix} g_i, \, i=1,\dots,n \\ f \end{smallmatrix} \in A\right)$.
Alors $(A, A^+) \to (B, B^+)$ se factorise uniquement par la paire $\left(A[\tfrac{1}{f}]\right.$, clôture intégrale dans $A[\tfrac{1}{f}]$ de $\left.A^+[\tfrac{g_1}{f}, \dots, \tfrac{g_n}{f}]\right)$.
De plus, $\mathrm{Spa}(A[\tfrac{1}{f}], \quad \downarrow \quad) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est un homéomorphisme sur U.

<u>Dém</u> : Par hypothèse sur le morphisme $\mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$, il n'existe pas d'élément $v \in \mathrm{Spa}(B, B^+)$ tq $v(f) = 0$.
Il y a une application naturelle
$$\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spa}(B, B^+)$$
$$\mathfrak{p} \longmapsto v_{\mathfrak{p}} : B \to \mathrm{Frac}(B/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\text{triv}} \{0, 1\}$$
Si f n'est pas inversible dans B, il existe $\mathfrak{p}$ idéal premier de B contenant f et alors $v_{\mathfrak{p}}(f) = 0$, contradiction. Donc on obtient une unique extension $A[\tfrac{1}{f}] \to B$.
Pour chaque $i = 1, \dots, n$, $h_i := \frac{g_i}{f} \in B$ vérifie $v(h_i) \leq 1$ $\forall v \in \mathrm{Spa}(B, B^+)$, donc par le lemme, $h_i \in B^+$. D'où un morphisme $A^+[\frac{g_1}{f}, \dots, \frac{g_n}{f}] \to B^+$, qui s'étend à la clôture intégrale. ∎

On en déduit que $\left(A[\frac{1}{f}], \widetilde{A^+[\frac{g_1,\dots,g_n}{f}]} := \text{clot. intég. dans } A[\frac{1}{f}] \text{ de } A^+[\frac{g_1}{f},\dots,\frac{g_n}{f}]\right)$

ne dépend que de $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{g_i,f}$ et on peut définir $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+$ sur la base des intersections finies de $U_{g,f}$

par $$\mathcal{O}_X(U) = A[\tfrac{1}{f}]$$ $$\mathcal{O}_X^+(U) = \widetilde{A^+[\tfrac{g_1,\dots,g_n}{f}]}$$ si $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{g_i,f}$.

<u>Prop</u> : Les préfaisceaux $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+$ sont des faisceaux.

<u>Dém</u> : On a vu dans la proposition précédente + lemme que pour tout $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{g_i,f}$, $\mathcal{O}_X^+(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U),\ v(f) \leq 1\ \forall v \in U\}$.

Donc si $\mathcal{O}_X$ est un faisceau, $\mathcal{O}_X^+$ aussi.

Le pullback par $\varphi : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spa}(A,A^+)$ de $\bigcap_{i=1}^{n} U_{g_i,f}$ est $D(f)$. Donc $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}$ est le poussé en avant (comme préfaisceau) de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Par conséquent c'est un faisceau, puisque $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ en est un. ∎

<u>Déf</u> : Un <u>espace adique (discret)</u> est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, (v_x)_{x\in X})$ consistant en un espace topologique X, un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ et une classe d'éq. de valuations v_x sur $\mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x \in X$, de support $\mathfrak{m}_{X,x}$, qui est localement de la forme $(\mathrm{Spa}(A,A^+), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}, v_x$ étendue à $\mathcal{O}_{X,x}$ (possible par Prop 1)).

Morphismes : $f : X \to Y$ + $f^\flat : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ morphisme de faisceaux tq $\forall x \in X$, $f_x^\flat : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ est compatible aux valuations (+ local).

<u>Prop</u> : Le foncteur $\left\{ \begin{array}{c} \text{paires de Huber} \\ \text{discrètes} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{espaces adiques} \\ \text{discrets} \end{array} \right\}$

$$(A, A^+) \longmapsto \mathrm{Spa}(A, A^+)$$

est pleinement fidèle.

<u>Dém</u> : Admis (pas difficile). ∎

Soit R anneau. Soit X un schéma sur $\mathrm{Spec}(R)$. On peut lui associer naturellement deux espaces adiques sur $\mathrm{Spa}(R, R)$:

- X^{ad} : si localement $X = \mathrm{Spec}(A)$, localement $X^{ad} = \mathrm{Spa}(A, A)$.
- $X^{ad/R}$: —— —— , —— $X^{ad/R} = \mathrm{Spa}(A, R)$

<u>Prop</u> : Si X est séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(R)$, alors $X^{ad} \to X^{ad/R}$ est une immersion ouverte. Si X est propre sur $\mathrm{Spec}(R)$, $X^{ad} \to X^{ad/R}$ est un isomorphisme.

<u>Dém</u> : Notons tout d'abord que $X^{ad} \to X^{ad/R}$ est localt sur X^{ad} une immersion ouverte. En effet, pour le vérifier, on peut supposer X affine, $X = \mathrm{Spec}(A)$. Alors on regarde $\mathrm{Spa}(A, A) \to \mathrm{Spa}(A, R)$, avec A de type fini comme R-algèbre donc engendré par un nb fini d'élts $f_1, \dots, f_n$.

Alors $\mathrm{Spa}(A,A) = \bigcap_{i=1}^{n} U_{f_i,1} \underset{\text{ouvert.}}{\subseteq} \mathrm{Spa}(A,K)$

Donc dire que $X^{ad} \to X^{ad/K}$ est une immersion ouverte et un isomorphisme revient juste à vérifier que c'est une injection ou une bijection. C'est exactement le contenu du critère valuatif ! ∎

La prochaine fois, nous verrons comment recoller sur un espace adique discret X les catégories $\mathcal{D}(A,A^+)_\bullet)$ pour $U = \mathrm{Spa}(A,A^+) \subseteq X$ ouvert et les différents foncteurs entre ces catégories. Cela nous donnera le formalisme des six foncteurs recherché.