Globalisation et formalisme des six foncteurs

Soit $(A,A^+) \to (B,B^+)$ un morphisme entre paires de Huber discrètes, où tous les anneaux considérés sont supposés être des $\mathbb{Z}$-algèbres de t.f. Grâce au travail accompli lors des séances précédentes, on peut définir des catégories triangulées

$$D((A,A^+)_\bullet), \quad D((B,B^+)_\bullet)$$

et des foncteurs :

- $- \overset{L}{\underset{(A,A^+)_\bullet}{\otimes}} - : D((A,A^+)_\bullet) \times D((A,A^+)_\bullet) \to D((A,A^+)_\bullet)$.
- $R\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,-) : D((A,A^+)_\bullet) \times D((A,A^+)_\bullet) \to D((A,A^+)_\bullet)$.

(Notons que si $M, N \in D((A,A^+)_\bullet)$, S ext.-disc.,

$$R\mathrm{Hom}\left((A,A^+)_\bullet[S], R\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)\right) \simeq R\mathrm{Hom}\left((A,A^+)_\bullet[S] \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} M, N\right)$$

$$\underset{(N\ \text{solide})}{=} R\mathrm{Hom}\left((A,A^+)_\bullet[S] \overset{L}{\underset{(A,A^+)_\bullet}{\otimes}} M, N\right)$$

$$\underset{(\text{monoïdalité})}{=} R\mathrm{Hom}\left(A[S] \overset{L}{\underset{(A,A^+)_\bullet}{\otimes}} M, N\right)$$

$$\underset{(N\ \text{solide})}{=} R\mathrm{Hom}\left(A[S] \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} M, N\right)$$

$$= R\Gamma(S, R\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)),$$

donc $R\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) \in D((A,A^+)_\bullet)$.

- $f_* : D((B,B^+)_\bullet) \to D((A,A^+)_\bullet)$ foncteur oubli
- $f^* = - \overset{L}{\underset{(A,A^+)_\bullet}{\otimes}} (B,B^+)_\bullet : D((A,A^+)_\bullet) \to D((B,B^+)_\bullet)$

  adjoint à gauche de f_*.
- $f_! : D((B,B^+)_\bullet) \longrightarrow D((A,A^+)_\bullet)$

  défini comme composée

$$D((B,B^+)_\bullet) \xrightarrow{} D((B,A^+)_\bullet) \xrightarrow[\text{oubli}]{} D((A,A^+)_\bullet)$$

$j_!$ adjoint à gauche de j^*,

$j : (B,A^+) \to (B,B^+)$.

- $f^! : D((A,A^+)_\bullet) \longrightarrow D((B,B^+)_\bullet)$

  adjoint à droite de $f_!$.

La formation de ces foncteurs est compatible à la composition, et $f_!$ satisfait la formule de projection.

Nous avons aussi vu que l'on peut associer à toute paire de Huber discrète (A,A^+) un espace adique $\mathrm{Spa}(A,A^+)$ (espace topologique muni d'un faisceau d'anneau) et que pour $(A,A^+) \to (B,B^+)$ comme ci-dessus, le morphisme induit $f : \mathrm{Spa}(B,B^+) \to \mathrm{Spa}(A,A^+)$

se factorise

$$f : \mathrm{Spa}(B, B^+) \xrightarrow{j} \mathrm{Spa}(B, A^+) \xrightarrow{g} \mathrm{Spa}(A, A^+)$$

j immersion ouverte

g "propre" : (quasi-compact et) satisfait le critère valuatif de propreté,

ce qui justifie géométriquement (a posteriori) la définition donnée ci-dessus de $f_!$.

Rq : g est la compactification relative de f qui est canonique (aspect remarquable de la théorie des espaces adiques discrets par rapport à la théorie des schémas).

Le formalisme des espaces adiques (discrets) va nous permettre de globaliser les constructions précédentes et de construire ainsi le formalisme des 6 foncteurs désiré.

Avant cela, il nous faut établir un énoncé de changement de base assez général.

<u>Prop 1</u> : Soit $(A, A^+) \to (B, B^+)$, $(A, A^+) \to (C, C^+)$ des morphismes entre paires de Huber discrètes, et supposons

$$B \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} C = B \underset{A}{\otimes} C =: D, \quad B^+ \overset{L}{\underset{A^+}{\otimes}} C^+ = B^+ \underset{A^+}{\otimes} C^+ =: D^+.$$

(Tor-indépendance : uniquement pour ne pas manipuler des anneaux dérivés)

Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} D((B,B^+)_\bullet) \arrow[r, "- \otimes_{(B,B^+)_\bullet} (D,D^+)_\bullet"'] \arrow[d, "\text{oubli}"] & D((D,D^+)_\bullet) \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ D((A,A^+)_\bullet) \arrow[r, "- \otimes_{(A,A^+)_\bullet} (C,C^+)_\bullet"'] & D((C,C^+)_\bullet) \end{tikzcd}$$

commute.

Dém : On dispose d'une transformation naturelle
$$g^* f_* \to f'_* g'^*,$$
si l'on note
$$f : (A,A^+) \to (B,B^+)$$
$$g : (A,A^+) \to (C,C^+)$$
et avec des $(-)'$ les flèches déduites par changement de base.

déduite par adjonction de
$$f_* = f_* \mathrm{id} \to f_* g'_* g'^* = g_* f'_* g'^*.$$
On affirme que c'est un isomorphisme.
Comme tous les foncteurs impliqués commutent aux colimites, il suffit de le vérifier pour $M \in D((B,B^+)_\bullet)$ de la forme
$$M = (B,B^+)_\bullet[S], \quad S \text{ ext. disc.}$$
Il faut démontrer dans ce cas :
$$(B,B^+)_\bullet[S] \overset{L}{\underset{(A,A^+)_\bullet}{\otimes}} (C,C^+)_\bullet \simeq (D,D^+)_\bullet[S] \in D((C,C^+)_\bullet).$$

On se ramène au cas $A = A^+$, $B = B^+$, $C = C^+$.
Donnons-nous une surjection
$$A[T_1, \dots, T_n] \to C.$$
Comme $(C, A[T_1, \dots, T_n])_\bullet \simeq C_\bullet$, on peut par le même argument supposer $C = A[T_1, \dots, T_n]$ et donc par récurrence supposer $C = A[T]$.
Alors le foncteur $- \overset{L}{\underset{A_\bullet}{\otimes}} C_\bullet$ est donné par
$R\underline{Hom}_A(A((T^{-1}))/A[T], -)$ (pour le voir on peut tester sur les $A_\bullet[S']$, S' ext disc, puisque $R\underline{Hom}(A((T^{-1}))/A[T], -)$ et $- \otimes_{A_\bullet} C_\bullet$ commutent aux colimites — le premier car $A((T^{-1}))/A[T]$ est compact projectif dans $D(A_\bullet)$. Or $A_\bullet[S'] = \prod_I A$ et donc $R\underline{Hom}_A(A((T^{-1}))/A[T], A_\bullet[S']) = \prod_I R\underline{Hom}(A((T^{-1}))/A[T], A)$
$$= \prod_I A[T] \quad .)$$

D'un autre côté,
$$D_\bullet[S] = B_\bullet[S] \overset{L}{\underset{B_\bullet}{\otimes}} D_\bullet$$
Comme $D = B[T]$, on a pour la même raison que ci-dessus
$$- \overset{L}{\otimes}_{B_\bullet} D_\bullet = R\underline{Hom}_B\left(B((T^{-1}))/B[T], -\right).$$

Il suffit donc pour conclure de voir que pour tout $M \in D(B_\bullet)$,

$$R\underline{Hom}_A\left(A((T^{-1}))/A[T], M\right) \simeq R\underline{Hom}_B\left(B((T^{-1}))/B[T], M\right).$$

Or

$$R\underline{Hom}_A\left(A((T^{-1}))/A[T], M\right) = R\underline{Hom}_A\left(A((T^{-1}))/A[T] \otimes_A B, M\right)$$

$$\underset{(M \text{ solide})}{=} R\underline{Hom}_A\left(A((T^{-1}))/A[T] \otimes_{A_\bullet} B_\bullet, M\right)$$

On a bien $A((T^{-1}))/A[T] \otimes_{A_\bullet} B_\bullet = B((T^{-1}))/B[T]$, ce qui conclut. ∎

<u>Rq</u>: La proposition s'applique par exemple à la situation où $Spa(C, C^+) = U\left(\frac{g_1, \dots, g_n}{f}\right)$ est un ouvert rationnel de $Spa(A, A^+)$.

<u>Recollement</u>:

Si $U \subseteq Spa(A, A^+)$ est un ouvert rationnel, il n'est pas vrai que le foncteur

$$(A, A^+)_\bullet\text{-Mod} \longrightarrow (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))_\bullet\text{-Mod}$$

$$M \longmapsto M \otimes_{(A, A^+)_\bullet} (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))_\bullet$$

soit exact.

Ainsi, considérons l'ouvert rationnel $U_{T,1} = Spa(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z}[T])$ de $Spa(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$. Le morphisme injectif

$$\mathbb{Z}[T] \longrightarrow \mathbb{Z}((T^{-1})) \quad \text{dans } (\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\bullet\text{-Mod}$$

devient, après application de $\otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\blacksquare} \mathbb{Z}[T]_\blacksquare$,

$$\mathbb{Z}[T] \longrightarrow \mathbb{Z}((T^{-1})) \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\blacksquare} \mathbb{Z}[T]_\blacksquare = 0.$$

Ce défaut d'exactitude empêche de recoller les catégories abéliennes $(A, A^+)_\blacksquare$-Mod lorsque $U = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ parcourt les ouverts affinoïdes d'un espace adique discret X.

$\rightsquigarrow$ On recolle donc plutôt les catégories dérivées $D((A, A^+)_\blacksquare)$.

Si l'on considère de nouveau l'exemple $X = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})$, et le recouvrement ouvert $j_1 : U_{T,1} \hookrightarrow X$, $j_2 : U_{1,T} \hookrightarrow X$, on sait déjà que le noyau de $j_1^* = - \otimes_{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\blacksquare} \mathbb{Z}[T]_\blacksquare$ est la sous-catégorie de $D((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\blacksquare)$ - formée des $\mathbb{Z}((T^{-1}))$-modules (cf. cours sur les groupes abéliens solides).

Pour analyser j_2^*, décomposons j_2 :

$$j_2 : U_{1,T} \xrightarrow[j_2']{} U_{T,T} \xrightarrow[j_2'']{} X,$$

de sorte que $j_2^* = j_2'^* \circ j_2''^*$.

On a $U_{T,T} = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[T][\tfrac{1}{T}] = \mathbb{Z}(T)$, clôture int. de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}(T))$

Donc $\left(\mathcal{O}(U_{T,T}), \mathcal{O}^+(U_{T,T})\right)_\bullet = (\mathbb{Z}(T), \mathbb{Z})_\bullet$

et donc $j_2''^* = - \overset{L}{\underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes}} \mathbb{Z}(T)$.

Quant à j_2', il est de même nature que j_1, quitte à remplacer X par $U_{T,T}$ et T par T^{-1}.

Par conséquent, $M \in D((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\bullet)$ est tué par j_2^* ssi $M \overset{L}{\underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes}} \mathbb{Z}(T)$ est tué par $j_2'^*$ ssi $M \overset{L}{\underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes}} \mathbb{Z}(T)$ est un $\mathbb{Z}((T))$-module ssi M est un $\mathbb{Z}[[T]]$-module.

En conséquence, un objet de $D((\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_\bullet)$ est tué à la fois par j_1^* et j_2^* ssi il est à la fois un module sur $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ et $\mathbb{Z}[[T]]$. Or,

$$\mathbb{Z}((T^{-1})) \overset{L}{\underset{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\bullet}{\otimes}} \mathbb{Z}[[T]] = \left(\mathbb{Z}[[U]] \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}[T] \xrightarrow{UT-1} \mathbb{Z}[[U]] \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}[T]\right) \overset{L}{\underset{(\mathbb{Z}[T],\mathbb{Z})_\bullet}{\otimes}} \mathbb{Z}[[T]]$$

$$= \left(\mathbb{Z}[[U,T]] \xrightarrow[UT-1]{} \mathbb{Z}[[U,T]]\right)$$

est un complexe acyclique (noter que UT est top. nilpotent dans $\mathbb{Z}[[U,T]]$). Donc si M est tué à la fois par j_1^* et j_2^*, M est nul.

Par la proposition 1 ci-dessus, le même énoncé est vrai pour tout $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ avec un recouvrement $U_{f,1}, U_{1,f}$, $f \in A$.

En général, supposons que X soit recouvert par des ouverts rationnels de la forme $U\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{f_i}\right) = U_i$, $f_1,\dots,f_n \in A$.

Soit $M \in D((A,A^+)_\bullet)$ tué par les j_i^*, $j_i : U_i \to X$, $i=1,\dots,n$. On veut montrer que M est nul.

On peut supposer que l'un des f_i, disons f_n est égal à 1 (en effet, il suffit de montrer que tous les localisés $M[\frac{1}{f_i}]$ s'annulent). On raisonne alors par récurrence sur n. Si $n=2$, c'est le cas traité ci-dessus ($f_1 = f$, $f_2 = 1$). Par ce cas, il suffit donc de montrer que les localisés de M sur $U_{f_1,1}$ et U_{1,f_1} s'annulent. Donc on peut supposer $f_1 \in A^+$ ou $f_1^{-1} \in A^+$. Dans le premier cas, les

$$U_i = U\left(\frac{f_1,\dots,f_{n-1},1}{f_i}\right) = U\left(\frac{f_2,\dots,f_{n-1},1}{f_i}\right)$$

$i=2,\dots,n$ forment déjà un recouvrement donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Dans le second cas,

$$U_i = U\left(\frac{f_1,\dots,f_{n-1},1}{f_i}\right) = U\left(\frac{1,f_2f_1^{-1},\dots,f_{n-1}f_1^{-1}}{f_1^{-1}f_i}\right)$$

pour $i=1,\dots,n-1$ forment un recouvrement, donc de nouveau on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Tout recouvrement ouvert fini de $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ peut être raffiné par un recouvrement de la forme ci-dessus.

Par conséquent, si $M \in D((A, A^+)_\blacksquare)$ est tel que $j_i^* M = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, pour un recouvrement ouvert rationnel $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ de X (avec $j_i : U_i \to X$), alors M est nul.

Cela suggère qu'il est raisonnable d'espérer recoller les catégories triangulées $D((A, A^+)_\blacksquare)$ lorsque $U = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ parcourt les ouverts rationnels d'un espace adique donné.

Malheureusement, la notion de catégorie triangulée n'est pas adaptée à ces questions de recollement.

<u>Ex</u> : On peut recouvrir $\mathbb{P}^1_k$ ($k = \bar{k}$ corps) par deux copies de $\mathbb{A}^1_k$ recollées le long de $\mathbb{G}_{m,k}$, mais bien que

$$\mathrm{QCoh}(\mathbb{P}^1_k) \simeq \mathrm{QCoh}(\mathbb{A}^1_k) \underset{\mathrm{QCoh}(\mathbb{G}_{m,k})}{\times} \mathrm{QCoh}(\mathbb{A}^1_k)$$

(descente Zariski), cela n'est plus vrai au niveau des catégories dérivées.

Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^1_k}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)[1]) = H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(-2)) \simeq k$

mais les morphismes entre les restrictions de ces deux objets à chacune des copies de $\mathbb{A}^1_k$ sont nuls, puisque $\mathbb{A}^1_k$ est affine. Donc le foncteur de restriction

$$D_{Qcoh}(\mathbb{P}^1_k) \longrightarrow D_{Qcoh}(\mathbb{A}^1_k) \times_{D_{Qcoh}(\mathbb{G}_{m,k})} D_{Qcoh}(\mathbb{A}^1_k)$$

n'est pas pleinement fidèle...

Pour contourner cette difficulté, il faut formuler et résoudre le problème de recollement considéré avec une notion plus fine que celle de catégorie triangulée, celle de ∞-catégorie stable. À toute paire de Huber discrète (A, A^+), on peut associer une ∞-catégorie stable $\mathcal{D}((A,A^+)_\blacksquare)$ (qui permet de reconstruire $D((A,A^+)_\blacksquare)$ comme sa catégorie homotopique), telle que toutes les propriétés de $D((A,A^+)_\blacksquare)$ discutées dans ce cours s'étendent à $\mathcal{D}((A,A^+)_\blacksquare)$, et telle que l'on puisse donner un sens à l'assertion suivante, et la prouver :

Soit X espace adique discret. Le foncteur associant à un ouvert affinoïde $U = \mathrm{Spa}(A,A^+)$ de X la ∞-catégorie stable $\mathcal{D}((A,A^+)_\blacksquare)$ définit un faisceau de ∞-catégories sur X.

Nous ne dirons rien de la signification précise de cet énoncé, ni de sa démonstration (qui est formelle avec ce qui a été fait ci-dessus). Nous en retiendrons le fait que l'on peut désormais définir pour tout espace adique discret X une catégorie $\mathcal{D}((\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)_\bullet)$ (en prenant les sections globales sur X du faisceau ci-dessus), telle que

$$\mathcal{D}((\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)_\bullet) = \mathcal{D}((A, A^+)_\bullet) \quad \text{si } X = \mathrm{Spa}(A, A^+).$$

Soit X un schéma de t.f. sur $\mathbb{Z}$. Posons

$$D(X) := \mathcal{D}((\mathcal{O}_{X^{ad}}, \mathcal{O}_{X^{ad}}^+)_\bullet).$$

Par recollement depuis le cas affine, on dispose sur $D(X)$ d'une structure monoïdale symétrique $-\overset{L}{\otimes}_X -$, d'un Hom interne, de foncteurs adjoints f_*, f^* pour tout morphisme $f: X \to Y$ entre deux tels schémas.

Si f est un tel morphisme, supposé séparé, on peut factoriser $f^{ad}: X^{ad} \xrightarrow[j]{} X^{ad/Y} \xrightarrow[g]{} Y^{ad}$

Lorsque X et Y sont affines, les foncteurs g_* et $j_!$

commutent au changement de base le cas d'une immersion ouverte, par la proposition 1 (directement pour g_* et en passant aux adjoints à droite pour $j_!$). Par conséquent, ils se recollent et on peut définir $j_!$ et g_*, et donc aussi $f_! = g_* \circ j_!$, dans la situation ci-dessus.

Ces arguments montrent aussi que $f_!$ satisfait aux propriétés usuelles:

- Changement de base propre : si $g : Y' \to Y$,

$$\begin{tikzcd} X' = Y' \times_Y X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

f, g tor-indépendants l'application naturelle $g^* f_! \to f'_! g'^*$ est un isomorphisme.

- Formule de projection :

$f : X \to Y$, $M \in D(X)$, $N \in D(Y)$

$$f_!(f^* N \otimes_X M) \simeq N \otimes_Y f_! M.$$

- Si f est propre, $f_! = f_*$. En effet, on a vu dans le cours précédent que dans ce cas, on a un isomorphisme :

$$X^{ad} \xrightarrow{\sim} X^{ad/Y}.$$

Le foncteur $f_!$ ainsi défini commute aux sommes directes ($j_!$ commute aux sommes directes comme adjoint à gauche, et g_* aussi car si on a un ouvert affine U de Y, il s'écrit comme limite finie de foncteurs oublis, venant du choix d'un recouvrement ouvert affine de la préimage de U dans X). Il admet donc (par une version du th. de représentabilité de Brown pour les ∞-catégories) un adjoint à droite $f^!$.

Pour faire le lien avec la dualité de Grothendieck-Serre, il faut pouvoir décrire $f^!$ dans certaines situations.

<u>Prop</u> : Soit $f : R \to A$ un morphisme de Tor-dim finie. Le morphisme naturel (déduit de l'adjonction entre $f_!$, $f^!$ et de la formule de projection)

$$f^! R \otimes^L_{A_\bullet} f^* \to f^!$$

entre foncteurs $D(R_\bullet) \to D(A_\bullet)$ est un isomorphisme. Si en outre f est lisse de dimension d, on a un isomorphisme naturel

$$f^! R \simeq \det_A \Omega^1_{A/R}[d].$$

<u>Dém</u> : Pour le premier point, on peut supposer que $A = R[T]$ est une algèbre de polynômes, ou que f est surjective. Dans le second cas, $f_! = f_*$ et $f^! = R\underline{\mathrm{Hom}}_R(A, -) = R\underline{\mathrm{Hom}}_R(A, R) \otimes^L_{A_\bullet} f^*$ (car A est un R-module parfait par hyp.)

Dans le premier cas, si $A = R[T]$,

$$f_! = - \otimes^{L}_{(A,R)} R((T^{-1}))/R[T][-1],$$

d'où l'on déduit par adjonction $f^! R = R[T][1]$.

Pour prouver que la flèche $f^! R \otimes^{L}_{A} f^* \to f^!$ est un isomorphisme, comme les deux membres commutent aux sommes directes (c'est clair à gauche car f^* est un adjoint à gauche ; pour la droite, notons que $f_!$ préserve les objets compacts comme vu dans un cours précédent), on peut tester sur les objets de la forme $\prod_I R$. Le membre de droite commute aux produits, donc $f^! \prod_I R = \prod_I R[T][1]$. À gauche, on a :

$$R[T][1] \otimes^{L}_{R[T]} \Big(\prod_I R \otimes_R R[T]\Big)$$

$$= \prod_I R \otimes_R R[T]\,[1]$$

qui est bien $\prod_I R[T][1]$.

Pour le second point, on note donc d'abord que si $f : R \to A$ est une immersion régulière (fermée) (= f surjective + idéal de f localement sur $\mathrm{Spec}(R)$ engendré par une suite régulière), et que $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ est de pure codim c,

$$f^! R = R\mathrm{Hom}_R(A, R) = \det{}_A\big(\ker(f)/\ker(f)^2\big)^{\vee}[-c].$$

Si $f : R \to A$ est maintenant lisse de dim d, tout plongement de $\mathrm{Spec}(A)$ dans un espace affine sur R est une immersion régulière. Comme on a calculé le dualisant pour l'espace affine, on en déduit que $f^!R$ est un A-module projectif de rang 1 concentré en degré d. Pour le calculer, on regarde le morphisme diagonal $\mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(A)$, qui est de nouveau une immersion régulière (de codim d), donnée par la multiplication $g : A \otimes_R A \to A$. À l'aide du calcul pour les immersions régulières, on obtient :

$$f^!R \simeq f^!R \otimes^L_{A_\blacksquare} f^!R \otimes \underbrace{g^!(A \otimes_R A)}_{\det(\ker(g)/\ker(g)^2)^*[-d]}$$

Comme $f^!R$ est inversible, cf. ci-dessus, on peut le simplifier des deux côtés et l'inverser, pour obtenir :

$$f^!R \simeq g^!(A \otimes_R A)^* = \det(\underbrace{\ker(g)/\ker(g)^2}_{= \Omega^1_{A/R}})[d]$$ ∎

<u>Relation avec la théorie classique :</u>

Si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, la catégorie $D((A,A^+)_\blacksquare)$ contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $D(A)$ dérivée des A-modules (au sens usuel, vus comme A-modules discrets), via le foncteur $M \mapsto \underline{M}$ (exercice).

Ces plongements se recollent (...) et fournissent un plongement de $D_{Qcoh}(X)$ dans $D(X)$ pour tout schéma X de t.f. sur $\mathbb{Z}$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre deux tels schémas, on vérifie facilement que f^*, f_*, $- \otimes_X -$, $R\underline{Hom}(-,-)$ coïncident sur ces sous-catégories avec les foncteurs usuels. De plus, si f est de Tor-dimension finie, $f^!$ préserve ces sous-catégories par la proposition précédente. Supposons en outre f propre. Alors $f_! = f_*$. Comme f_* préserve la sous-catégorie $D_{Qcoh}(-)$ et que $f^!$ préserve les objets compacts (f a Tor-dim finie), on en déduit que $f_! = f_*$ préserve les objets compacts et discrets, c'est-à-dire les complexes parfaits.

Cela donne une nouvelle preuve de la finitude de la cohomologie dans le cas propre, où les seuls calculs sont locaux (même : pour la droite affine !).