a) Formalisme des six foncteurs

Comment généraliser les énoncés de dualité du cours précédent lorsque le morphisme n'est plus supposé propre / lisse ? Ou sans hypothèse de noethérianité ?

Trois observations :

1) La discussion du cours précédent montre que si $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^m_k$ et que X est lisse de dim n, $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{O}_X}(i_*\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^m})$ est concentré en degré $m-n$ pour $\mathcal{F}$ cohérent, et donné par ω_X. On déduit encore formellement de la dualité pour $\mathbb{P}^m_k$ une dualité au niveau des complexes même si l'on ne sait pas que $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{O}_X}(i_*\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^m})$ n'est pas concentré en un seul degré (e.g. si X pas lisse).
Suggère de remplacer ω_X par un complexe en général.

2) En topologie, pour des variétés non compactes, la dualité de Poincaré dit que la cohomologie est duale de la cohomologie à support compact. Dans l'iso

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S}[d]) \overset{(*)}{\simeq} R\mathrm{Hom}_R(R\Gamma(X,\mathcal{F}), R)$$

pour $X \xrightarrow{f} S = \mathrm{Spec}(R)$ propre et lisse entre schémas noethériens, on serait donc tenté de remplacer $R\Gamma(X,\mathcal{F})$ par "$R\Gamma_c(X,\mathcal{F})$" si X n'est plus supposé propre.

3) $(*)$ ressemble à une adjonction

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f^!\mathcal{O}_S) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(f_!\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$$

avec $f_! : D(\mathcal{O}_X\text{-Mod}) \to D(\mathcal{O}_S\text{-Mod})$, $f^! : D(\mathcal{O}_S\text{-Mod}) \to D(\mathcal{O}_X\text{-Mod})$ d'hypothétiques foncteurs adjoints l'un de l'autre, le premier calculant la coh "à supports" et le second redonnant les formules précédentes quand il est appliqué à $\mathcal{O}_S$.

<u>Idée / programme de Grothendieck</u> : il devrait être possible d'associer à tout schéma X une catégorie triangulée $D(X)$, contenant $QCoh(X)$, équipée d'une structure monoïdale symétrique $- \underset{X}{\otimes} -$ ayant un adjoint à droite partiel $\underline{Hom}_X(-,-)$, i.e. t.q :

$$Hom_{D(X)}(\mathcal{F} \underset{X}{\otimes} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq Hom_{D(X)}(\mathcal{F}, \underline{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$$

et pour tout morphisme de schémas $f : X \to Y$,
d'un foncteur monoïdale symétrique $f^* : D(Y) \to D(X)$ ayant un adjoint à droite $f_* : D(X) \to D(Y)$,
d'un foncteur $f_! : D(X) \to D(Y)$ admettant un adjoint à droite $f^! : D(Y) \to D(X)$.

(6 foncteurs : $\underset{X}{\otimes}$, $\underline{Hom}_X$, $f^*, f_*, f_!, f^!$)

On souhaite en outre avoir les propriétés additionnelles suivantes :

(a) Si f propre, $f_! = f_*$

(b) Si f immersion ouverte, $f^* = f^!$

(c) Formation de $f^*, f_*, f_!, f^!$ compatible à la composition.

(d) $\mathcal{F} \in D(X)$, $\mathcal{G} \in D(Y)$

$$f_* \underline{Hom}_X(\mathcal{F}, f^! \mathcal{G}) \simeq \underline{Hom}_Y(f_! \mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

(e) Si f est lisse de dim relative pure d,

$$\omega_{X/Y}[d] \otimes_X f^* \mathcal{F} \simeq f^! \mathcal{F} \quad \forall \mathcal{F} \in D(Y).$$

• + d'autres propriétés importantes (formule de projection, changement de base propre, ...)

Rq : Tous les foncteurs ci-dessus sont des foncteurs entre cat. dérivées, même si la notation ne l'indique pas.

Notons que les propriétés ci-dessous redonnent la dualité de Grothendieck-Serre si $f : X \to S$ est propre, lisse, de pure dim d en effet, (d) donne :

$$f_* \underline{Hom}_X(\mathcal{F}, f^! \mathcal{O}_S) \simeq \underline{Hom}_S(f_! \mathcal{F}, \mathcal{O}_S) \quad (\star)$$

et (a) et (e) permettent de réécrire $(\star)$ comme :

$$f_* \underline{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_{X/S}[d]) \simeq \underline{Hom}_S(f_* \mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$$

En général, $(\star)$ est la forme correcte de la dualité.

Comment construire un tel formalisme ?

On pourrait poser $D(X) = D(\mathcal{O}_X\text{-Mod})$, ou $D(X) = D(QCoh_X)$, (ou $D(X) = D_{Qcoh}(\mathcal{O}_X\text{-Mod})$ ...) et considérer les foncteurs dérivés de f_* et f^* (pour le définir, résoudre par des modules plats)

Cela pose différentes difficultés, mais la principale est la suivante : comment définir $f_!, f^!$?

Notons que si $f : X \to Y$ admet une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} j \text{ immersion ouverte} \\ g \text{ propre} \end{array}$$

(c'est toujours le cas pour un morphisme séparé de type fini, par le théorème de compactification de Nagata)

alors (a), (b), (c) ci-dessus nous disent que nécessairement

$$f_! = g_* \circ j_!, \text{ avec } j_! = \text{adjoint à gauche de } j^*.$$

Mais un foncteur adjoint à droite commute aux limites, donc en particulier aux produits. Par conséquent, on veut que j^* commute aux produits.

Supposons que $j : \mathrm{Spec}(A[\tfrac{1}{f}]) \to \mathrm{Spec}(A)$. Alors j^* est donné par $- \otimes_A A[\tfrac{1}{f}]$. Mais

$$\left(\prod_{\mathbb{N}} A\right) \otimes_A A[\tfrac{1}{f}] \not\xrightarrow{\sim} \prod_{\mathbb{N}} A[\tfrac{1}{f}]$$

donc il y a un problème...

Autre façon de poser le problème : supposons que (☆) vaille pour tout $f : X \to Y$. En particulier, doit être vrai dans le cas affine, e.g. si $Y = \mathrm{Spec}(k)$, $X = \mathbb{A}^1_k$.

Mais alors pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, le membre de gauche est

$$f_* \mathcal{O}_X = k[T][1]$$

et le membre de droite devrait donc être

$$\mathrm{Hom}_k(V, k), \text{ avec } V = H^1(f_! \mathcal{O}_X)$$

k-espace vectoriel

Mais $k[T]$ est un espace vectoriel de dim infinie dénombrable sur k, donc il ne peut pas être le dual d'un k-ev V ! (Le dual d'un k-ev est soit de dim finie, soit de dim infinie non dénombrable.)

On pourrait remédier à ce problème en voyant comme $k[T]$ comme un k-espace vectoriel topologique discret à l'intérieur de la catégorie des k-espaces vectoriels linéairement topologiques et séparés. Si l'on munit cette catégorie du Hom interne défini par

$$\mathrm{Hom}_k^{top}(V, W) = \{ f : V \to W \text{ linéaire continue} \}$$ munie de la

top. pour laquelle une base d'ouverts est donnée par

$$U_{v, W'} = \{ f : V \to W \text{ linéaire continue}, f(v) \in W' \}$$

$v \in V$, $W' \subseteq W$ sous-espace ouvert

alors la flèche naturelle

$$k[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_k^{top}(\mathrm{Hom}_k^{top}(k[T], k), k)$$

est un iso et le premier Hom_k^{top} est égal à Hom_k comme ensemble. Donc $V = \mathrm{Hom}_k^{top}(k[T], k) \simeq k[[T]]$

conviendrait comme choix de $H^1(f_! \mathcal{O}_X)$ ci-dessus, si l'on définissait $D(X)$ en général comme une certaine catégorie dérivée de $\mathcal{O}_X$-modules topologiques.

<u>Rq</u> : Cette idée est (en quelque sorte) implémentée de façon purement algébrique par Tate pour les courbes dans l'article déjà mentionné précédemment. Cf. aussi l'approche de Deligne dans l'appendice du livre de Hartshorne.

Mais cette idée se heurte à un problème, même dans le cas simple où $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$:

La catégorie des groupes abéliens topologiques n'est pas une catégorie abélienne !

(problème bien connu en cohomologie continue des groupes top.)

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R}_{disc} \xrightarrow{id} \mathbb{R}$ morphisme continu.

Noyau et conoyau ne peuvent qu'être nuls (foncteur oubli vers Set est fidèle et l'application ensembliste sous-jacente est une bijection), mais f n'est pas un homéomorphisme.

D'une manière générale, il est malaisé de faire de l'algèbre homologique en présence de structures topologiques.

Clausen et Scholze proposent de remédier à ce problème en remplaçant la notion d'espace topologique par une notion plus "algébrique". Le cours se propose d'expliquer comment, avec en ligne de mire l'application à la construction des six foncteurs en cohomologie quasicohérente.

b) Ensembles condensés

" = espaces topologiques avec de meilleures propriétés catégoriques "

Rappels préliminaires :

1) Sites et faisceaux

Déf : Un site est une catégorie $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ de familles de morphismes $\{f_i : U_i \to U\}$ entre objets de $\mathcal{C}$, appelés recouvrements, tq :

(i) si $V \to U$ est un iso, $\{V \to U\} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$.

(ii) si $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ et que pour tout $i \in I$, on se donne $\{V_{ij} \to V_i\}_{j \in J_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, alors
$$\{V_{ij} \to U\}_{i\in I, j \in J_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C}).$$

(iii) si $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ et $V \to U$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors $U_i \times_U V$ existe pour tout $i \in I$ et $\{U_i \times_U V \to V\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$.

Ex standard : X espace top., $\mathcal{C}$ = cat. des ouverts de X
morphismes = inclusions

On décrète que $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ ssi $\bigcup_i U_i = U$.

Déf, Soit $\mathcal{C}$ un site, $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ (= foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$). On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau si pour tout $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, le digramme

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{j,k\in I} \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$$

induit une bijection

$$\mathcal{F}(U) = \mathrm{eq}\Big(\prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{j,k\in I} \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)\Big)$$

Rq: De la même manière, on définit la notion de faisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans une catégorie $\mathcal{D}$ ayant toutes les limites.

2) Limites et colimites

Rappelons pour commencer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie, un diagramme dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $M : \underset{\text{catégorie d'indices}}{\underbrace{I}} \to \mathcal{C}$

On notera M_i l'image de $i \in I$.

Déf: Une limite du I-diagramme M dans $\mathcal{C}$ est un objet $\lim_I M \in \mathcal{C}$

muni de morphismes $p_i : \lim_I M \to M_i$, $\forall i \in I$, tq

(1) $\forall \phi : i \to i'$ dans I, $p_{i'} = M(\phi) \circ p_i$.

(2) pour tout objet $N \in \mathcal{C}$ avec des morphismes $q_i : N \to M_i$ $\forall i$ satisfaisant (1), $\exists!\ q : N \to \lim_I M$ tq $q_i = p_i \circ q$ $\forall i$.

Si la limite existe, elle est unique à unique iso près.

Rq: Dans $\mathcal{C} = \mathrm{Set}$, les limites se calculent comme on pense : si $M : I \to \mathrm{Set}$, et $J = \mathrm{Ob}(I)$, alors $\lim_I M$ existe et est donnée par :

$$\lim_I M = \Big\{ (m_i) \in \prod_{i\in J} M_i,\ \forall \phi : i \to i'\ \ M(\phi)(m_i) = m_{i'} \Big\}$$

En particulier, on voit que pour toute cat. $\mathcal{C}$,

$\forall$ diag. $M : I \to \mathcal{C}$, $\forall X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I M) = \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M_i)$

dans Set.

Ex : • produits : catégorie I = ensemble avec pour seuls morphismes les applications identités

• égaliseurs : catégorie I = $\bullet \rightrightarrows \bullet$

(cas particulier : noyaux (un des morphismes est nul)

• pullbacks : catégorie I =

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

• limites cofiltrées : diag. $M : I \to \mathcal{C}$, avec I ayant au moins un objet

$\forall\, i, j \in I \in I$, $\exists\, k$ avec $k \to i$, $k \to j$ et $\forall\, i, j \in I$, $\forall\, a : i \to j$, $b : i \to j$

$\exists\, c : k \to i$ tq $M(a \circ c) = M(b \circ c)$

(e.g. $M = id : I \to I$ cofiltré $\Rightarrow$ tout diagramme de source I sera cofiltré)

Lemme : Soit $M : I \to \mathcal{C}$ diagramme. Notons $J = Ob(I)$, $A = Mor(I)$, $s, t : J \to A$ applications "source" et "but". Si $\prod_{i \in J} M_i$, $\prod_{a \in A} M_{t(a)}$ existent et si l'égaliseur de

$$\prod_{i \in J} M_i \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{a \in A} M_{t(a)}$$

où $p_a \circ \psi = M(a) \circ p_{s(a)}$, $p_a \circ \phi = p_{t(a)}$, existe, alors cet égaliseur est la limite du diagramme $M : I \to \mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ si produits et égaliseurs existent, toutes les limites existent.

Dualement (i.e., en passant aux catégories opposées), on définit la notion de colimite d'un diagramme dans $\mathcal{C}$. Tous les énoncés ci-dessus ont un analogue dual.

Ex : coproduits, coégaliseurs, pushouts, colimites filtrées.

3) Ensembles profinis

Déf: Un espace topologique est dit **profini** s'il est homéo-morphe à une limite de diagramme d'ensembles finis discrets.

Lemme: Soit X un espace topologique. S'équivalent :

(1) X est profini

souvent omis dans la suite

(2) X est Hausdorff (=séparé), (quasi)compact et totalement discontinu.

De plus dans ce cas, X est limite cofiltrée d'ensembles finis discrets.

Dém : Supposons (1). Soit $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathrm{Top} \\ i \mapsto X_i \end{array}$, diagramme d'ensembles finis discrets.

Chaque X_i est compact Hausdorff, donc $\prod X_i$ est compact et $X = \lim_I X_i \subseteq \prod X_i$ est fermé, donc X est compact. Si $x \neq x' \in X$, $\exists i$ tq x et x' ont des images distinctes dans X_i. Donc x et x' ont des voisinages disjoints, donc X est Hausdorff. Même type d'arguments pour tot. disc.

Supposons (2). Soit J = ensemble des déc. en union disjointe finie $X = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ avec V_i ouvert (et donc fermé) $\forall i \in I$. Alors $\forall I \in J$, on a une application continue $X \to I$, envoyant un élt de V_i sur i. On dit que $I \leq I'$ si I' raffine I. Dans ce cas, on a $I' \to I$. Donc on obtient un système inverse d'espaces finis discrets indexé par J. Les flèches $X \to I$, $I \in J$, donnent

$$X \longrightarrow \lim I \quad \text{continue.}$$

Cette flèche est injective, car X est tot. disc. et donc $\forall x \in X$ $\{x\} = \bigcap$ ouverts fermés contenant x. Elle est surjective, par la caractérisation de la quasi-compacité en termes d'intersections.

La preuve de (2) ⇒ (1) prouve aussi la dernière assertion. $\square$

Exo : Vérifier en détail les étapes de la preuve ci-dessus.

Trouver un exemple de système inverse d'espaces top. qc tq la limite n'est pas qc.

Ex : • p nombre premier.

$\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n$ est profini.

• Ensemble de Cantor

} en fait tous ces exemples sont homéo...

Ces préliminaires achevés, on peut finalement définir la notion d'ensemble condensé.

Déf : Un ensemble condensé est un faisceau sur le site $*_{\text{proét}}$ formé de tous les ensembles profinis, avec morphismes continus, et recouvrements donnés par les familles $\{S_i \xrightarrow{f_i} S\}_{i\in I}$ avec I fini et $\bigcup_{i\in I} f_i(S_i) = S$.

Autrement dit, c'est un foncteur contravariant

$$F : \{\text{ens. profinis}\}^{op} \longrightarrow Set$$

tq

• $F(\emptyset) = *$

• $\forall S_1, S_2$ profinis, $F(S_1 \sqcup S_2) \simeq F(S_1) \times F(S_2)$

• $\forall S' \twoheadrightarrow S$, $F(S) \xrightarrow{\sim} \{x \in F(S'),\ p_1^*(x) = p_2^*(x) \in F(S'\times_S S')\}$

On appellera $F(*)$ l'ensemble sous-jacent à F.

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec limites finies, on appellera objet condensé de $\mathcal{C}$

un faisceau sur $*$ proét à valeurs dans $\mathcal{C}$.

<u>Notation</u> : $\mathrm{Cond}(\mathcal{C})$.

<u>Ex</u> : Soit T un espace topologique. Considérons le préfaisceau

$$\underline{T} : \{\text{ens. profinis}\}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$$
$$S \longmapsto \mathrm{Cont}(S, T).$$

Alors $\underline{T}$ est un ensemble condensé, i.e. un faisceau.

En effet, une surjection entre compacts Hausdorff (en particulier entre profinis) est automatiquement une application quotient.

Le foncteur $\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Cond}(\mathrm{Set})$
$$T \longmapsto \underline{T}$$
commute aux limites et est pleinement fidèle sur la catégorie des $\underbrace{\text{espaces topologiques compactement engendrés}}$.

déjà considérés en topologie pour résoudre le problème qu'il n'y a pas de Hom interne dans Top.