a) Ensembles condensés

Rappel :

Déf : Un ensemble condensé est un faisceau sur le site *-proét formé de tous les ensembles profinis (et morphismes continus) ayant pour recouvrements les familles finies de morphismes $\{S_i \xrightarrow{f_i} S\}$ t.q. $S = \bigcup_i f_i(S_i)$.

Autrement dit, c'est un foncteur

$$F : \{\text{ensembles profinis}\}^{op} \to Set$$

avec
- $F(\emptyset) = *$,
- $\forall S_1, S_2$ profinis, la flèche naturelle
$$F(S_1 \sqcup S_2) \to F(S_1) \times F(S_2)$$
est une bijection.
- $\forall S' \twoheadrightarrow S$ entre profinis, la flèche
$$F(S) \to \{x \in F(S'),\ p_1^*(x) = p_2^*(x) \in F(S' \times_S S')\}$$
est une bijection, avec $p_1, p_2 : S' \times_S S' \to S'$ les deux projections.

Si F est un ensemble condensé, on appellera $F(*)$ l'ensemble sous-jacent à F. Catégorie notée $Cond(Set)$.

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie ayant les limites finies, un objet condensé de $\mathcal{C}$ est un faisceau sur *-proét à valeurs dans $\mathcal{C}$. Catégorie notée $Cond(\mathcal{C})$.

(Ex : $\mathcal{C} = Ab$, $\mathcal{C} = Rings$, ...)

Exemple fondamental : Soit X un espace topologique.

Considérons le préfaisceau

$$\underline{X} : S \mapsto \mathrm{Cont}(S, X).$$

C'est un ensemble condensé : seule la dernière condition demande une vérification ; elle suit de ce qu'une surjection continue entre compact Hausdorff (et donc en particulier entre profinis) est une application quotient.

Pour manipuler les ensembles condensés, il est pratique de pouvoir remplacer le site $*_{\text{proét}}$ par d'autres sites, qui peuvent s'avérer plus utiles dans certaines situations, comme on le verra ci-dessous. Cela nécessite une petite digression topologique.

Question : Soit X un espace topologique. Existe-t-il une application universelle de X vers un espace topologique compact Hausdorff ? Plus précisément, existe-t-il un espace topologique compact Hausdorff βX avec une application continue $i : X \to \beta X$ tq toute $f : X \to K$ continue, K compact Hausdorff, s'étende uniquement en une application continue $\beta f : \beta X \to K$ via i ?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "\beta f"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Cette propriété universelle caractérise βX à homéomorphisme près.

La réponse est oui. Idée de construction : considérons

$$Y = \prod_{\substack{f : X \to K \\ K \text{ compact Hausdorff}}} K$$

Par Tichonoff, c'est un compact Hausdorff, donc l'adhérence de l'image de la flèche naturelle de X vers Y est un compact Hausdorff, avec la propriété universelle voulue. Problème : la collection de toutes les $f : X \to K$ continues, K compact Hausdorff, n'est pas un *ensemble*. On peut remédier à ce problème en bornant la taille des K autorisés.

Autre possibilité : on peut définir βX comme l'ensemble des ultrafiltres sur X (éléments de $X \hookrightarrow$ ultrafiltres principaux), muni de la topologie engendrée par les $\{F : U \in F\}$, U ouvert de X.

Rq : 1) En général, $i : X \to \beta X$ n'est pas un homéomorphisme sur son image, ni même injective (vrai si X est localt compact Hausdorff).

2) Dès que X n'est pas compact Hausdorff (auquel cas $X \simeq \beta X$), très difficile de décrire βX...

Déf (Gleason) : Un espace topologique compact Hausdorff S est dit *extrêmement discontinu* si toute surjection continue $S' \to S$ avec S' compact Hausdorff se scinde (continûment).

Les espaces extrêmement discontinus sont des espaces topologiques étranges, comme le montre l'exercice suivant.

Ex : 1) Soit S extrêmement discontinu. Montrer que l'adhérence de tout ouvert U dans S est ouverte.
(Indication : soit $U \subseteq S$ ouvert. Appliquer l'hypothèse de la définition à la composée

$$S' := (S \setminus U \times \{0\}) \cup (\bar{U} \times \{1\}) \xhookrightarrow{\text{inclusion}} S \times \{0,1\} \xrightarrow{\text{projection}} S$$

pour en construire une section σ et mq $\bar{U} = \sigma^{-1}(\bar{U} \times \{1\})$.)

2) En déduire que S ext. discontinu $\Rightarrow$ S profini (utiliser la caractérisation du cours précédent)

3) Soit (s_n) une suite convergente dans S, de limite s. En supposant la suite (s_n) non stationnaire, fabriquer une suite d'entiers $(n_k)_k$ str. croissante et une suite d'ouverts $(U_k)_k$ de S tq $s_{n_k} \in U_k$ $\forall k$ et $U_k \cap U_{k'} = \emptyset$ $\forall k \neq k'$.
En déduire, en considérant $V = \bigcup_k U_{2k}$ et en utilisant 1), une contradiction.
Ainsi, si S est ext. discontinu, toute suite convergente est stationnaire. En particulier, $\mathbb{Z}_p$ n'est pas ext. discontinu.

Après cet exercice, il ne semble pas évident qu'il puisse exister des ext. discontinus non triviaux (i.e., non finis) ! On va en fait montrer dans la proposition suivante qu'il y en a bcp, en un sens précis.

Prop : Pour tout espace top. compact Hausdorff S, il existe une surjection continue $S' \to S$, avec S' ext-discontinu.

Dém : Notons $S_0 = S_{disc}$. Considérons $S' := \beta S_0$. C'est par définition un compact Hausdorff.
Soit $S'' \xrightarrow{\pi} S'$ une surjection continue, avec S'' compact Hausdorff. On peut construire (axiome du choix) une section ensembliste de π au-dessus de $S_0 \subseteq S'$; elle est continue puisque S_0 est discret. Par la propriété universelle de $\beta(-)$, elle s'étend (uniquement) en $s : S' \to S''$ continue, qui satisfait $\pi \circ s = id$ (sinon, id et $\pi \circ s$ seraient deux extensions continues différentes de $i \circ id : S_0 \to S'$ à S').
Donc S' est ext-discontinu.
Enfin, considérons $S_0 \xrightarrow{id} S$, qui est continue. En appliquant la propriété universelle à nouveau, on obtient $S' \to S$ continue et surjective. ∎

Autres modèles pour les ensembles condensés :

$*'_{proét}$ = site formé par les compacts Hausdorff, avec même condition sur les recouvrements que ci-dessus.

$*''_{proét}$ = site formé par les ext-discontinus, avec même condition sur les recouvrements que ci-dessus.

Rq : $*''_{proét}$ pas un site au sens du cours précédent, cf. preuve ci-dessus, mais cela n'a pas d'importance.

Prop : les catégories de faisceaux sur $*_{\text{proét}}$, $*'_{\text{proét}}$ et $*''_{\text{proét}}$ sont toutes équivalentes.

Dém : Tout faisceau sur $*'_{\text{proét}}$ peut être restreint au sous-site $*_{\text{proét}}$. Réciproquement, soit F un faisceau sur $*_{\text{proét}}$ (= un ensemble condensé). Soit S compact Hausdorff. Choisissons $S' \twoheadrightarrow S$ continue avec S' profini (par ex., ext. discontinu).

On pose $F(S) = \{ x \in F(S'),\ p_1^*(x) = p_2^*(x) \in F(\underbrace{S' \times_S S'}_{\text{profini}}) \}$.

Ceci montre l'équivalence entre faisceaux sur $*_{\text{proét}}$ et $*'_{\text{proét}}$.

Même preuve pour l'équivalence avec la troisième, en prenant garde au fait que si S compact Hausdorff et S' ext. discontinu, $S' \times_S S'$ n'est pas en général ext. discontinu. Mais on peut trouver $S'' \twoheadrightarrow S' \times_S S'$ avec S'' ext. discontinu, donc pour étendre un faisceau F sur $*''_{\text{proét}}$ à $*'_{\text{proét}}$ en posant :

$$F(S) = \mathrm{eq}\left(F(S') \rightrightarrows F(S'') \right)$$

si $S' \twoheadrightarrow S$, $S'' \twoheadrightarrow S' \times_S S'$, S', S'' ext. disc. ∎

Notons que la condition d'être un faisceau sur $*''_{\text{proét}}$ se formule très simplement :

Un ensemble condensé est un foncteur

$$F : \{\text{ext. disc.}\}^{op} \to \mathrm{Set}$$

tq $F(\emptyset) = *$, $F(S_1 \sqcup S_2) = F(S_1) \times F(S_2)$ $\quad S_1, S_2$ ext. disc.

En effet, la dernière condition est automatique : soit $S' \xrightarrow{\pi} S$, S, S' ext. disc. Par déf, $\exists\ \sigma : S \to S'$ section.

J'affirme que $F(S) = \mathrm{eq}(F(S') \rightrightarrows F(S''))$, si $S'' \to S' \times_S S'$, S'' ext. disc. La flèche naturelle du membre de gauche vers le membre de droite est injective, puisqu'après composition avec σ^* c'est l'identité. Pour la surjectivité, soit $y \in \mathrm{eq}(F(S') \rightrightarrows F(S''))$. Posons $x = \sigma^*(y)$. Soit

$$f : S' \longrightarrow S' \times S'$$
$$s \longmapsto (s, \sigma(\pi(s)))$$

f est continue et se factorise en une application continue encore notée $f : S' \to S' \times_S S'$, puisque $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_S$.

L'application f se relève en $g : S' \to S''$ continue (en effet, c'est équivalent à dire que $S' \times_{f, S' \times_S S'} S'' \to S'$ a une section continue, et S' est ext. disc.).

On a, si $\pi_1, \pi_2 : S'' \to S$ sont les deux "projections", $\pi_1 \circ g = \mathrm{id}_{S'}$, $\pi_2 \circ g = \sigma \circ \pi$. Donc $\pi_1^*(y) = \pi_2^*(y)$ implique $y = \pi^*(\sigma^*(y)) = \pi^*(x)$, comme voulu. ∎

Ce fait nous sera utile plus tard pour étudier les propriétés de la catégorie des groupes abéliens condensés (= objets condensés dans Ab). La description des ensembles condensés via $*_{\text{proét}}$ est quant à elle utile pour analyser la relation avec les espaces topologiques :

<u>Déf</u> : Rappelons qu'un espace top. X est dit <u>compactement engendré</u> si une application $f : X \to Y$ est continue lorsque la composée $S \to X \xrightarrow{f} Y$ l'est pour tout $S \to X$ compact Hausdorff.
(c'est une top. quotient.)

Ex : Soit X un espace top. tq tout point de X a une base dénombrable de voisinages (par ex., X métrisable). Soit $F \subset X$ tq $\forall\, S \xrightarrow[\text{continue}]{f} X$, S compact Hausdorff, $f^{-1}(F)$ fermé.

Soit $x \in \bar{F}$. On choisit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de X formant une base de voisinages de x (possible par hypothèse). Alors $U_n \cap F \neq \emptyset$ $\forall n$; soit $x_n \in U_n \cap F$. L'application

$$f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow X, \quad n \longmapsto \begin{cases} x_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

est continue si l'on munit $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{N}$ et les ensembles $V \cup \{\infty\}$ avec $V \subseteq \mathbb{N}$ cofini. Cela fait de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ un compact Hausdorff (et même un profini — exercice !). Par hypothèse, $f^{-1}(F)$ est fermé donc comme elle contient $\mathbb{N}$, elle contient ∞, et donc $x \in F$. Ainsi F est fermé. ■

Rq : Dans la définition, on pouvait de façon équivalente (par les considérations ci-dessus) remplacer "compact Hausdorff" par "profini".

Prop : Le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ de la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés vers les ensembles condensés est pleinement fidèle. Il admet un adjoint à gauche $F \mapsto F(*)_{top}$, avec $F(*)_{top}$ l'ensemble sous-jacent à F muni de la topologie quotient pour $\bigsqcup_{F(S)} S \longrightarrow F(*)$.

Dém : Il suffit de montrer que pour tout espace top compact^t engendré X et tout ensemble condensé F,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CondSet}}(F, \underline{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(F(*)_{\mathrm{top}}, X)$$

et que $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \simeq X$. Laissé en exercice. ■

b) Cohomologie

Nous venons de voir qu'une classe importante d'espaces top. se plonge de façon pleinement fidèle dans Cond(Set), ce qui permet effectivement de penser aux ensembles condensés comme à une généralisation des espaces topologiques. À quel point les propriétés d'un espace topologique sont-elles reflétées par l'ensemble condensé qui lui correspond ?

Le but de ce § est de montrer qu'un invariant important des espaces topologiques, leur cohomologie, est déterminée par l'ensemble condensé associé.

Rappelons d'abord ce qu'on entend par là. Soit X un espace topologique. On considère en général sa cohomologie singulière : soit

$$\cdots \to C_{i+1}(X) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(X) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(X) \to \cdots$$

le complexe des chaînes singulières de X ($C_i(X)$ = gpe ab. libre sur l'ensemble des applications continues $\underset{\{(x_0,\dots,x_i)\in[0,1]^{i+1};\ \sum x_i=1\}}{\underset{\shortparallel}{\Delta^i}} \to X$), et

$$\cdots \to C^{i-1}(X) \xrightarrow{d_{i-1}} C^i(X) \xrightarrow{d_i} C^{i+1}(X) \to \cdots$$

le complexe dual des cochaînes singulières de X (on a $C^i(X) = \mathrm{Hom}(C_i(X), \mathbb{Z})$ et $d_i = \partial_{i+1}^*$).

Le i-ème groupe de cohomologie de ce complexe est noté

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{Z}).$$

Mais on peut aussi considérer le faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur le site des ouverts de X et considérer ses groupes de cohomologie : $H^i_{top}(X, \mathbb{Z})$.

Les deux définitions coïncident lorsque X est un CW-complexe, mais diffèrent en général : si X est profini, $H^0_{sing}(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{Fun}(X, \mathbb{Z})$, $H^0_{top}(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{Cont}(X, \mathbb{Z})$. C'est donc plutôt $H^*_{top}(X, \mathbb{Z})$ que l'on aura envie de considérer en général.

On admettra le fait suivant :

Prop : Soit $(S_i)_i$ un système cofiltré d'espaces compacts Hausdorff et $S = \varprojlim_i S_i$. La flèche naturelle

$$\varinjlim_i H^i_{top}(S_i, \mathbb{Z}) \to H^i_{top}(S, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$.

Pour S compact Hausdorff (en réalité, pour tout espace topologique ...), nous disposons désormais d'un troisième candidat :

Voyons S comme un objet du site $*_{proét}$, et considérons les groupes de cohomologie sur ce site du groupe abélien condensé (i.e. du faisceau abélien sur ce site) $\underline{\mathbb{Z}}$ (que l'on notera simplement $\mathbb{Z}$). On obtient ainsi des groupes de cohomologie $H^i_{cond}(S, \mathbb{Z})$, $i \geq 0$.

<u>Th</u> : On dispose d'isomorphismes fonctoriels
$$H^i_{top}(S, \mathbb{Z}) \simeq H^i_{cond}(S, \mathbb{Z}) \quad , i \geq 0.$$

<u>Dém</u> : ① Vérifions-le d'abord pour S profini. On écrit
$$S = \varprojlim_j S_j, \quad S_j \text{ fini},$$
comme limite cofiltrée. Alors d'un côté
$$\forall j, \; H^i_{top}(S_j, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \Gamma(S_j, \mathbb{Z}) & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}.$$
et donc par le rappel ci-dessus
$$H^i_{top}(S, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \varinjlim_j \Gamma(S_j, \mathbb{Z}) = \Gamma(S, \mathbb{Z}), & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}.$$
D'un autre côté,
$$H^0_{cond}(S, \mathbb{Z}) = \Gamma(S, \mathbb{Z}) \qquad (\text{par déf.})$$
Pour montrer que $H^i_{cond}(S, \mathbb{Z}) = 0$ si $i > 0$, il suffit de montrer que pour toute surjection $S' \to S$, S' profini, le complexe de Čech :
$$0 \to \Gamma(S, \mathbb{Z}) \to \Gamma(S', \mathbb{Z}) \to \Gamma(S' \times_S S', \mathbb{Z}) \to \cdots$$
est exact. (En général, cohomologie et cohomologie de Čech

ne coïncident pas. Mais un énoncé dénombrable de la coh. de Čech suffit : Stacks Project Tag 03F9.) On écrit $S' \to S$ comme limite cofiltrée de surjections $S_j' \to S_j$ entre ensembles finis, et on prend la colimite filtrée des complexes exacts

$$0 \to \Gamma(S_j, \mathbb{Z}) \to \Gamma(S_j', \mathbb{Z}) \to \Gamma(S_j' \times_{S_j} S_j', \mathbb{Z}) \to \cdots$$

(exacts car $S_j' \to S_j$ se scinde). C'est le complexe de départ puisque $\mathbb{Z}$ est discret.

(2) En général, on peut toujours trouver une surjection continue $S' \twoheadrightarrow S$ avec S' profini. Le complexe

$$0 \to \Gamma(S', \mathbb{Z}) \to \Gamma(S' \times_S S', \mathbb{Z}) \to \Gamma(S' \times_S S' \times_S S', \mathbb{Z}) \to \cdots$$

calcule $R\Gamma_{cond}(S, \mathbb{Z})$, puisque $H^i_{cond}(\underbrace{S' \times_S \cdots \times_S S'}_{j\text{-fois}}, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i > 0$ et $j > 0$ par (1).

(Ici, on utilise Stacks Project Tag 03F7.)

On dispose d'un foncteur

$$\alpha_* : Sh_{*\text{proét}/S} \longrightarrow Sh_S \qquad \left(\text{ici } Sh_{\mathcal{C}} = \begin{array}{c}\text{catégorie des faisceaux}\\ \text{abéliens sur le site } \mathcal{C}\end{array}\right)$$

$$F \longmapsto \left(U \mapsto \varinjlim_{\substack{U \supseteq K \\ K \text{ compact Hausdorff}}} F(K)\right)$$

exact à gauche. On a :

$$R\Gamma_{cond}(-, \mathbb{Z}) = R\Gamma_{top}(-, R\alpha_* \mathbb{Z})$$

en dérivant l'égalité $\Gamma_{cond}(S, \mathbb{Z}) = \Gamma_{top}(S, \alpha_* \mathbb{Z})$.

Pour montrer la proposition il suffit donc de montrer que $R\alpha_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, Cela peut se tester sur les tiges. Si $s \in S$, on a :

$$(R\alpha_* \underline{\mathbb{Z}})_s := \varinjlim_{\substack{U \ni s \\ U \text{ ouvert}}} R\Gamma(U, R\alpha_* \underline{\mathbb{Z}}) = \varinjlim_{\substack{V \ni s \\ V \text{ fermé}}} R\Gamma_{cond}(V, \mathbb{Z}).$$

Par ce qu'on a dit au-dessus, $R\Gamma_{cond}(V, \mathbb{Z})$ est calculé par

$$0 \to \Gamma(S' \times_S V, \mathbb{Z}) \to \Gamma(S' \times_S S' \times_S V, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

Prenant la colimite filtrée sur les voisinages fermés V de s, on obtient

$$0 \to \Gamma(S' \times_S \{s\}, V) \to \Gamma(S' \times_S S' \times_S \{s\}, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

qui calcule pour les mêmes raisons $R\Gamma_{cond}(\{s\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Donc $(R\alpha_* \underline{\mathbb{Z}})_s \simeq R\Gamma_{cond}(\{s\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. ∎

<u>Th</u> : Pour tout compact Hausdorff S,

$$H^i_{cond}(S, \underline{\mathbb{R}}) = \begin{cases} \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}) & i = 0 \\ & i \end{cases}$$

La preuve de cet énoncé est plus délicate : comme ci-dessus, on ramène le cas général au cas profini, et le cas profini au cas fini. Mais par rapport à la proposition précédente, la preuve est compliquée par le fait que si $S = \varprojlim_j S_j$, on n'a plus $\Gamma(S, \underline{\mathbb{R}}) = \varinjlim \Gamma(S_j, \underline{\mathbb{R}})$ (puisque $\mathbb{R}$ n'est pas discret !). Il faut donc y faire un peu d'analyse...