1) Groupes abéliens condensés

<u>Th</u> : La catégorie des groupes abéliens condensés est une catégorie abélienne, avec les propriétés suivantes :

- toutes les colimites existent. (AB3)
- toutes les limites existent. (AB3*)
- les coproduits arbitraires sont exacts. (AB4)
- les produits arbitraires sont exacts. (AB4*)
- les limites cofiltrées sont exactes. (AB5)
- Pour toute famille de diagrammes filtrés $(M_j : I_j \to \mathrm{Cond}(Ab))_j$ indexés par un ensemble J, l'application canonique

$$\operatorname*{colim}_{\prod_j I_j} \Big(\prod_j M_{ij} \Big) \longrightarrow \prod_J \operatorname*{colim}_{I_j} M_{ij}$$

est un isomorphisme. (AB6)

<u>Rq</u> : 1) Les numéros des propriétés sont ceux inventés par Grothendieck dans son article à Tohoku.

2) $\mathrm{Cond}(Ab)$ a donc des propriétés analogues à la catégorie des groupes abéliens, bien qu'étant un substitut pour la catégorie des groupes abéliens topologiques, dont on a vu qu'elle n'avait pas de bonnes propriétés (pas abélienne).

Le morphisme $\underline{\mathbb{R}_{disc}} \to \underline{\mathbb{R}}$ dans $\mathrm{Cond}(Ab)$ a un noyau nul et un conoyau non nul. En effet,

$\underline{\mathbb{R}_{disc}}$: $S \mapsto \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}_{disc})$ = fonctions loc. constantes $S \to \mathbb{R}$

$\underline{\mathbb{R}}$: $S \mapsto \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R})$

et comme vu dans le cas précédent $H^1_{cond}(S, \underline{\mathbb{R}_{disc}}) = 0$ si S est profini, donc le conoyau Q est donné par :

$$S \mapsto \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}) / \mathrm{Cont}(S, \mathbb{R}_{disc})$$

S profini. C'est un groupe abélien condensé avec groupe abélien sous-jacent $Q(*) = 0$!

3) Les propriétés (AB3, 4, 5, 3*) sont vraies sur n'importe quel site. Mais en général (AB4*) ne l'est pas.

Contre-ex : $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{C\left(\left(\frac{1}{n+1}, 0\right), \frac{1}{n+1}\right)}_{C_n} \subseteq \mathbb{R}^2$ (C : cercle ; $\subseteq$: top. induite)

Soit $F = (X \supseteq U \mapsto \mathrm{Cont}(U, \mathbb{R}))$

$G = (X \supseteq U \mapsto \mathrm{Cont}(U, \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$

Le morphisme naturel $F \to G$ est surjectif car toute application continue à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ peut être localement relevée à $\mathbb{R}$. Mais $\prod_{\mathbb{N}} F \to \prod_{\mathbb{N}} G$ n'est pas surjective : considérons l'élément de $\Gamma(X, \prod_{\mathbb{N}} G)$ dont la n-ème coordonnée est 0 sur C_n et $C_m \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si $m \neq n$. Il n'y a pas de voisinage de $(0,0)$ sur lequel cette section se relève en une section de $\prod_{\mathbb{N}} F$.

4) La condition (AB6) ne jouera pas un grand rôle dans la suite. Prendre garde au fait qu'elle ne dit pas que les colimites filtrées commutent aux produits (i.e. $\operatorname{colim}_I (\prod_K M_i) \simeq \prod_K \operatorname{colim}_I M_i$ ... On serait tenté de prendre $J = K$, $I_j = I$ pour tout $j \in J$, mais alors l'inclusion diagonale $I \to \prod_K I$ n'est pas cofinale).

La preuve du Théorème n'est pas difficile en utilisant $*_{\text{proét}}$.

Démo (du Théorème) : Voyons Cond(Ab) comme la catégorie des faisceaux abéliens sur $*_{\text{proét}}$, c'est-à-dire des foncteurs contravariants des ext. disc. vers les groupes abéliens envoyant union disjointe sur produits finis.

La formation des limites et colimites commute aux produits finis = coproduits finis dans Ab, donc cette catégorie est stable par formation des limites et colimites point par point. (En général, pour les faisceaux sur un site quelconque, il faudrait faisceautiser la colimite.) Par conséquent, pour tout diagramme $M : I \to \text{Cond}(Ab)$, la limite (resp. colimite) de ce diagramme est le groupe abélien condensé envoyant S ext. disc. sur $\lim_I (M_i(S))$ (resp. $\operatorname{colim}_I (M_i(S))$).

Donc toutes les propriétés se déduisent directement des propriétés analogues dans Ab. ∎

b) Intermède catégorique

Objets projectifs :

Déf/Prop : Un objet P d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est un objet <u>projectif</u> si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-) : \mathcal{A} \to Ab$ satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ est exact à droite (donc exact).
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ préserve les coégalisateurs.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ préserve les conoyaux.
- Toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to P \to 0$ se scinde.

<u>Ex</u> : Soit R un anneau. Les objets projectifs de Mod_R sont les rétractes de R-modules libres.

Objets compacts

<u>Déf</u> : Un objet C d'une catégorie $\mathcal{C}$ ayant les colimites filtrées est dit <u>compact</u> si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-) : \mathcal{C} \to Set$ préserve les colimites filtrées.

<u>Ex</u> : Dans $\mathcal{C} = Set$, les ensembles finis sont compacts. Ce sont les seuls : si C est un compact, écrivons C comme colimite filtrée de ses sous-ensembles finis, $C = \mathrm{colim}_i\, C_i$. Alors $id : C \to C$ doit se factoriser par un des C_i, donc C est fini.

<u>Ex</u> : Les objets compacts de Top ne sont pas les compacts... mais les ensembles finis. Cependant, si X espace top. et $\mathcal{C}$ = catégorie des ouverts de X, X compact (i.e. quasi-compact) $\Leftrightarrow$ X compact comme objet de $\mathcal{C}$.

Ex : Soit R un anneau. Les objets compacts de Mod_R sont les R-modules de $\underbrace{\text{présentation finie}}_{\text{(colimites finies itérées d'objets libres)}}$.

En mettant ensemble les deux définitions précédentes, on voit qu'un objet X d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ avec colimites est compact projectif ssi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \to Ab$ préserve toutes les colimites. ($\Rightarrow$ colimites engendrées par coégaliseurs et coproduits et coproduits = colimites filtrées de coproduits finis. Noter aussi que le foncteur oubli $Ab \to Set$ préserve et reflète les colimites filtrées.)

Ex : R anneau. Les objets compacts projectifs de Mod_R sont les R-modules projectifs de présentation finie, i.e. les rétracts de R-modules finis libres.

Générateurs :

Déf/Prop : Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne complète. Une famille d'objets S de $\mathcal{A}$ est une famille de générateurs si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- La famille des foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(s,-)$, $s \in S$, est fidèle (i.e. $\forall f,g : X \to Y$ dans $\mathcal{A}$, si $f\circ h = g \circ h$ $\forall h : s \to X$, $s \in S$, alors $f = g$)
- Tout objet $X \in \mathcal{A}$ est conoyau d'un morphisme entre

coproduits d'objets de S.

Ex : Soit R un anneau. $R \in \mathrm{Mod}_R$ est un générateur de Mod_R. En fait un théorème de Gabriel affirme qu'une catégorie abélienne cocomplète $\mathcal{A}$ avec un générateur compact projectif C est équivalente à la catégorie des R-modules, avec $R = \mathrm{End}(C)$, via le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}(C, X). \end{aligned}$$

c) Propriétés additionnelles de Cond(Ab)

Prop : La catégorie $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ est engendrée par des compacts projectifs.

Dém : Le foncteur oubli $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Set})$ commute aux limites, donc a un adjoint à gauche noté $T \mapsto \mathbb{Z}[T]$. Concrètement, $\mathbb{Z}[T]$ est obtenu en faisceautisant le foncteur envoyant S ext. discontinu sur $\mathbb{Z}[T(S)]$. En particulier, on dispose pour tout S ext. disc., d'un groupe abélien condensé $\mathbb{Z}[S]$ tq

$$\forall M \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}),\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})}(\mathbb{Z}[S], M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})}(S, M) = M(S)$$

Le foncteur $M \mapsto M(S)$ commute à toutes (les limites et) colimites, cf. la preuve du th. ci-dessus. Par conséquent, $\mathbb{Z}[S]$ est compact projectif.

De plus, si $M \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ vérifie $\underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], M)}_{=M(S)}=0$ pour tout S ext. disc., M est nul.

Donc les $\mathbb{Z}[S]$, S ext. disc., sont des générateurs (si $f, g : X \to Y$ dans $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, $f = g \iff \mathrm{id}_X : X \to X$ est l'égaliseur de f et g. Ce qu'on a dit ci-dessus montre que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], -)$, S ext. disc., forment une famille conservative et ces foncteurs préservent les limites donc les égaliseurs, donc reflètent ces conditions.)

Structure monoïdale symétrique, $\underline{\mathrm{Hom}}$:

On dispose d'une structure monoïdale symétrique $- \otimes -$ sur $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, définie comme suit : si M, $N \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, $M \otimes N$ est la faisceautisation de $S \mapsto M(S) \otimes N(S)$. Notons que $\mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T'] \simeq \mathbb{Z}[T \times T']$.

Ce (bi)foncteur a un adjoint à droite partiel : si $M, N \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, définissons $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)(S) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S] \otimes M, N).$$

Si $M, N, P \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, on a

$$\mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}(P \otimes M, N).$$

d) Extensions entre groupes abéliens condensés

La catégorie $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ fournit donc un substitut à la catégorie des groupes abéliens topologiques, avec d'excellentes propriétés catégoriques. On va voir maintenant que pour une classe naturelle de groupes abéliens topologiques, celle des groupes abéliens localement compacts, morphismes et extensions dans le monde condensé restent les mêmes.

Rappelons d'abord quelques propriétés de base des groupes abéliens loc. compacts (i.e., des groupes abéliens topologiques dont l'espace top. sous-jacent est localt compact Hausdorff).

Th : 1) Soit A un groupe abélien localt compact. On peut écrire $A \simeq \mathbb{R}^n \times B$, avec B admettant un sous-groupe compact ouvert (par conséquent, B est extension d'un groupe abélien discret par un groupe abélien compact).

2) Le foncteur $A \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) =: D(A)$ est une endofoncteur de la catégorie des groupes abéliens localement compacts et pour tout A, le morphisme naturel

$$A \longrightarrow D(D(A)) \qquad (\text{"dualité de Pontryagin"})$$

est un isomorphisme.

Cette dualité échange groupes abéliens compacts et discrets.

Rq : Dans le théorème, on a fait de $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$

un espace topologique en le munissant de la topologie compacte-ouverte. Ceci définit $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
Notons à ce sujet le fait suivant :

<u>Prop</u> : Soit A, B deux groupes abéliens localement compacts (en fait A, B groupes abéliens topologiques Hausdorff avec A, B compactement engendrés suffirait).
On a un isomorphisme naturel

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \simeq \underline{\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)}.$$

Hom interne dans Cond(Ab)

Hom muni de la top. compacte-ouverte.

<u>Dém</u> : Construisons une flèche

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)}.$$

Soit S profini. On a :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B})(S) &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S], \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B})) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S] \otimes \underline{A}, \underline{B}). \end{aligned}$$

En évaluant sur les points de S, cela donne une flèche

$$S \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A, B),$$

dont il faut s'assurer de la continuité. On a $\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{S}] = \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$ qui se surjecte sur $\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$.
Donc une application $\underline{A} \otimes \mathbb{Z}[S] \to \underline{B}$ détermine (et est déterminée par) une application d'ensembles condensés $\underline{A} \times \underline{S} \to \underline{B}$, i.e. par une application continue $A \times S \to B$, c'est-à-dire une application continue $S \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$
(C'est ici que l'on utilise l'hyp. A, B Hausdorff compactement engendrés.)

Montrons que la flèche ainsi produite est un isomorphisme. L'argument utilisé pour construire cette flèche montre que: $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) \to \underline{\mathrm{Hom}(A,B)}$ est injective. Pour la surjectivité, nous allons utiliser l'existence d'une résolution partielle:

$$\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\underline{A}] \longrightarrow \underline{A} \to 0$$
$$[(a_1, a_2)] \longmapsto [a_1+a_2] - [a_1] - [a_2]$$

Étant donnés S profini et $S \to \mathrm{Hom}(A,B)$ continue, on obtient $\mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \longrightarrow \underline{B}$, cf. ci-dessus.
On veut voir qu'elle se factorise par $A \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}]$, i.e. que la composée

$$\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \to \mathbb{Z}[\underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}] \longrightarrow \underline{B}$$

s'annule. Mais

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Ab)}}(\mathbb{Z}[\underline{A} \times \underline{A}] \otimes \mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(\underline{A \times A \times S}, \underline{B}),$$

i.e. la flèche composée correspond à une application continue $A \times A \times S \to B$. Elle est triviale puisque pour tout $s \in S$, on a un morphisme de groupes $A \to B$. ∎

On peut aussi définir une notion d'extension entre groupes abéliens localement compacts : une extension de A par B est la donnée d'une suite strictement exacte de groupes ab. loc. compacts $0 \to B \to C \to A \to 0$

(strict : une flèche $f : X \to Y$ est stricte si $X/_{\ker(f)} \to \mathrm{im}(f)$ est un homéomorphisme ; un complexe est strict si chaque différentielle est stricte.

On note $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ le groupe abélien (pour la somme de Baer) des classes d'équivalence d'extensions de A par B.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite stricte exacte de groupes abéliens localement compacts, la suite de groupes abéliens condensés $0 \to \underline{A} \to \underline{B} \to \underline{C} \to 0$ est exacte. Seule la surjectivité de $\underline{B} \xrightarrow{\pi} \underline{C}$ est à vérifier. Soit S ext.-disc et $f : S \to C$ continue. L'image de S est un compact de C. Pour chaque $x \in f(S) \subseteq C$, choisissons $y \in B$ tq $\pi(y) = x$ (π surjective). Soit K_y un voisinage compact de y. Alors $K_x := f(K_y)$ est un voisinage compact de x (π continue et ouverte). Choisissons ($f(S)$ compact) $x_1, \dots, x_n$ tq $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_{x_i}$ et posons $K = \bigcup_{i=1}^n K_{x_i}$, $K' = \bigcup_{i=1}^n K_{y_i}$.

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[d] \\ S \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

Alors et comme S est ext. disc., on a un relèvement de $S \to K$ à K'.

Le reste de ce cours est consacré à la démonstration du théorème suivant.

<u>Th</u> : Soient A, B deux groupes abéliens localement compacts. Les applications naturelles

$\mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(\underline{A},\underline{B})$, $\mathrm{Ext}^1(A,B) \to \mathrm{Ext}^1(\underline{A},\underline{B})$
sont des isomorphismes. De plus,

$$\mathrm{Ext}^i(\underline{A},\underline{B}) = 0, \quad \forall i \geq 2.$$

__Dém__ : On commence par différents dévissages. Bien que la catégorie des groupes abéliens localement compacts ne soit pas abélienne, on peut y définir un foncteur dérivé $R\mathrm{Hom}_{LCA}(-,-)$ ainsi qu'un morphisme

$$R\mathrm{Hom}_{LCA}(-,-) \to R\mathrm{Hom}_{Cond(Ab)}(\underline{-},\underline{-}),$$

en observant que $A \mapsto \underline{A}$ envoie suites exactes strictes sur suites exactes (cf. ci-dessus). Après application de H^0, H^1, le morphisme ci-dessus redonne ceux construits précédemment au niveau des Hom et Ext^1. On va montrer que ce morphisme est un isomorphisme. Par le théorème de structure des groupes abéliens local^t compacts, si l'on veut montrer que

$$R\mathrm{Hom}_{LCA}(A,B) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{Cond(Ab)}(\underline{A},\underline{B})$$

est un iso, on peut supposer $A = \mathbb{R}$, ou A discret, ou A compact. Le cas discret se ramène à $A = \mathbb{Z}$ (colimites filtrées + résolutions) qui est facile. Le cas $\mathbb{R}$ se ramène alors à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donc on peut supposer A compact. Soit $D(A)$ le dual de Pontryagin de A, qui est discret. On peut choisir une résolution

$$0 \to \bigoplus_J \mathbb{Z} \to \bigoplus_I \mathbb{Z} \to D(A) \to 0$$

(un sous-groupe d'un groupe abélien libre est libre).
Dualisant, on obtient une résolution de A par des $\prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donc on peut supposer $A = \prod_I \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
De même, on peut supposer $B = \mathbb{R}$, B discret ou B compact. Le cas compact se réduit de nouveau à $B = \prod_J \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et donc à $B = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (note : on utilise ici (AB4*) !).
On peut donc supposer $B = \mathbb{R}$ ou B discret.
On voit donc qu'il nous suffit de montrer l'énoncé suivant, où tout est vu dans $\mathrm{Cond}(Ab)$.

<u>Th</u> : Soit $A = \prod_I \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, I ensemble.

(1) Pour tout groupe abélien discret M,

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M) = \bigoplus_I M[-1],$$

où la flèche $\bigoplus_I M[-1] \to R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)$ est induite par les flèches

$$M[-1] = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[1], M) \to R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{pr_i^*} R\underline{\mathrm{Hom}}(\prod_I \mathbb{R}/\mathbb{Z}, M).$$

(2) $R\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{R}) = 0$.

Cela nous suffira, car Hoffmann-Spitzweck ont calculé les RHom correspondants dans LCA et obtenu les mêmes valeurs. Noter que l'énoncé ci-dessus est strictement plus fort que ce dont nous avons besoin, puisqu'il calcule $R\underline{\mathrm{Hom}}$ au lieu de RHom. Noter aussi que dorénavant nous supprimerons souvent les <u>( )</u> lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Pour faire la preuve, nous allons utiliser la résolution de Breen-Deligne de A. Avant d'expliquer de quoi il s'agit, rappelons brièvement ce qu'est une suite spectrale.

<u>Suites spectrales</u>

<u>Déf</u> : Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

(1) Une <u>suite spectrale</u> dans $\mathcal{A}$ est un système $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ où chaque E_r est un objet de $\mathcal{A}$, $d_r : E_r \to E_r$ un morphisme tq $d_r \circ d_r = 0$ et $E_{r+1} = \ker(d_r)/\mathrm{Im}(d_r)$ $\forall r \geq 1$.

(2) Un <u>morphisme</u> de suites spectrales $f : (E_r, d_r) \to (E'_r, d'_r)$ est une famille de morphismes $f_r : E_r \to E'_r$ avec $f_r \circ d_r = d'_r \circ f_r$ et f_{r+1} induit par f_r sur $E_{r+1} = \ker(d_r)/\mathrm{Im}(d_r)$, $E'_r = \dfrac{\ker(d'_r)}{\mathrm{Im}(d'_r)}$.

Étant donné $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ suite spectrale, on définit par récurrence : $0 = B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_r \subseteq \dots \subseteq Z_r \subseteq \dots \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 = E_1$

par $B_2 = \mathrm{im}(d_1)$, $Z_2 = \ker(d_1)$. Alors $d_2 : Z_2/B_2 \to Z_2/B_2$.

On définit B_3 comme le sous-objet de E_1 contenant B_2 et tq B_3/B_2 est l'image de d_2. Définition analogue pour Z_3.

À chaque étape, $E_r = Z_r / B_r$.

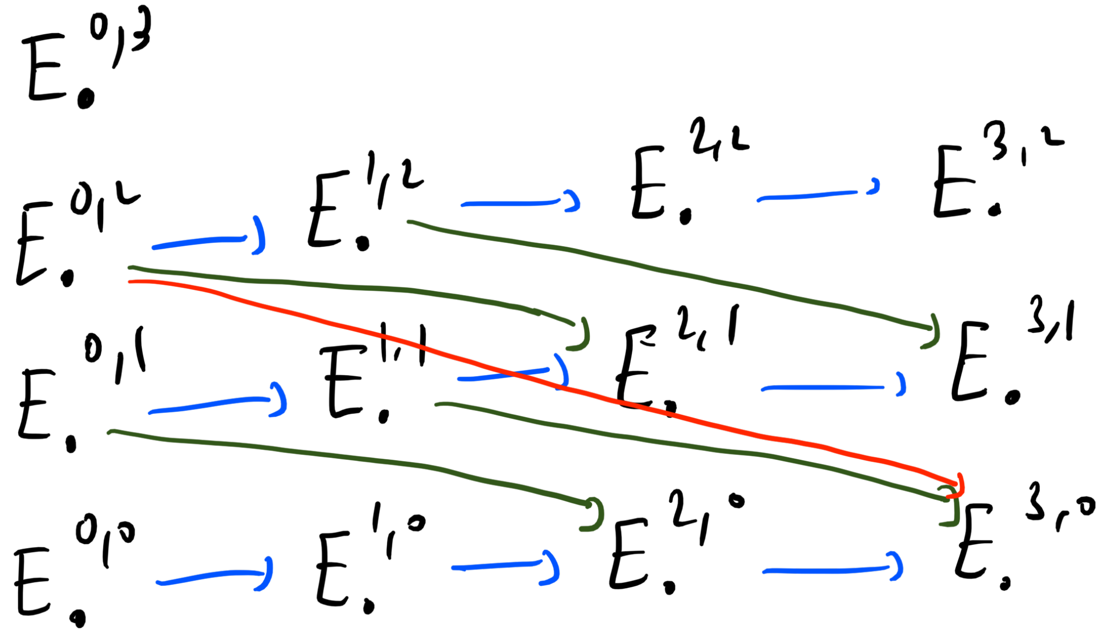
<u>Déf</u> : Soit $\mathcal{A}$ cat. ab., (E_r, d_r) suite spectrale.

(1) Si $Z_\infty = \lim Z_r$ et $B_\infty = \mathrm{colim}\, B_r$ existent, on pose $E_\infty = Z_\infty / B_\infty$.

(2) On dit que la suite spectrale dégénère en E_r $(r\geq 1)$ si $d_r = d_{r+1} = \dots = 0$. Dans ce cas, $E_r = E_{r+1} = \dots = E_\infty$.

Bien souvent, les E_r sont bigradués : $E_r = \bigoplus E_r^{p,q}$. On demande alors que d_r soit de bigraduation $(r, -r+1)$: $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$.

Supposons la bigraduation indexée par $p, q \in \mathbb{N}$. On peut alors se représenter la suite spectrale comme suit : à r fixé, on met $E_r^{p,q}$ au point (p,q) du plan. Les groupes placés sur chaque ligne de pente $\frac{-r+1}{r}$ forment un complexe. Au bout d'un moment, chaque différentielle $d_\bullet^{p,q}$ entrant ou sortant d'un $E_\bullet^{p,q}$ (pour p,q fixés) s'annule car soit la source soit le but de $d_\bullet$ sort du premier quadrant. Donc à p,q fixés, au bout d'un moment $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ se stabilise.



— : d_1 — : d_2 — : d_3

Aucune entrée sur la page E_1 ne se stabilise (flèches horizontales). Sur la page E_2, $E_2^{0,0}$ et $E_2^{1,0}$ se sont stabilisés.

<u>Notation</u> : On écrira

$$E_r^{p,q} \Longrightarrow E_\infty^{p,q}.$$

Exemple <u>de suites</u> spectrales :

1) Soit A une catégorie abélienne (avec assez d'injectifs) et $F : A \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ cat. abélienne, exact à gauche. Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe borné à gauche d'objets de A, on dispose de deux suites spectrales

$$E_2^{p,q} = R^pF(H^q(\mathcal{F}^\bullet)) \Longrightarrow R^{p+q}F(\mathcal{F}^\bullet)$$

$$E_1^{p,q} = R^qF(\mathcal{F}^p) \Longrightarrow R^{p+q}F(\mathcal{F}^\bullet).$$

<u>Ex</u> : • $\mathcal{C}$ site, $A = Ab_{\mathcal{C}}$ (faisceaux abéliens sur $\mathcal{C}$)
$\mathcal{B} = Ab$

$F = \Gamma(\mathcal{C}, -)$. $\mathcal{F}^\bullet$ complexe borné inf. — hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{C}, H^q(\mathcal{F}^\bullet)) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{C}, \mathcal{F}^\bullet)$$

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{C}, \mathcal{F}^p) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{C}, \mathcal{F}^\bullet).$$

• $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ site annelé, $A = \{\text{faisceaux de } \mathcal{O}\text{-modules sur } \mathcal{C}\}^{op}$
$\mathcal{B} = Ab$, $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(-, \mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}$-module.

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(H^{-q}(\mathcal{F}^\bullet), \mathcal{G}) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G})$$

$$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}^p, \mathcal{G}) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}).$$

pour tout $A^\bullet$ borné supérieurement.