a) Extensions entre groupes abéliens condensés

Nous voulons démontrer le résultat suivant.

<u>Th</u> : Soit $A = \prod_I \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, I ensemble.

(1) Pour tout groupe abélien discret M,

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M) = \bigoplus_I M[-1].$$

(2) $R\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{R}) = 0$.

<u>Rq</u> : En particulier, on obtient en utilisant la suite exacte longue et (2) que $R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. C'est une réponse "topologiquement raisonnable", bien plus que $\mathrm{Hom}_{Ab}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est gigantesque.

Un outil important de la preuve sera le résultat suivant, que nous admettons.

<u>Th</u> : Soit A un groupe abélien. Il existe une résolution fonctorielle de A de la forme

$$\to \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathbb{Z}[A^{r_{i,j}}] \dots \to \mathbb{Z}[A^3] \oplus \mathbb{Z}[A^2] \to \mathbb{Z}[A^2] \to \mathbb{Z}[A] \to A \to 0$$

avec $n_i, r_{i,j} \in \mathbb{N}$.

<u>Rq</u> : a) Cette construction étant fonctorielle, elle s'étend à tout groupe abélien dans un topos (prendre les sections, puis faisceautiser).

b) Les premiers termes de cette résolution sont ceux que nous avons utilisés la fois précédente pour décrire $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}, \underline{B})$. En quelque sorte, nous allons faire la même chose pour les

$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Cond(Ab)}}$, $n \geq 0$, à l'aide de la résolution ci-dessus. Mais nous n'essaierons pas de rendre explicites les termes de cette résolution (ce serait difficile) ; la seule chose qui importera est qu'une telle résolution existe et que ses termes soient de la forme ci-dessus.

<u>Cor</u> : Soit A, M deux groupes abéliens condensés. Soit S ext.-disc. On dispose d'une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \prod_{j=1}^{n_p} H^q(A^{r_{p,j}} \times S, M) \Rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}(A, M)(S).$$

<u>Dém</u> : Tensorisons la résolution de Breen-Deligne (dans $\mathrm{Cond(Ab)}$) de A par $\mathbb{Z}[S]$:

$$\underbrace{\cdots \to \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathbb{Z}[A^{r_{ij}} \times S] \to \cdots \to \mathbb{Z}[A^2 \times S] \to \mathbb{Z}[A \times S]}_{\mathcal{F}^\bullet} \to A \otimes \mathbb{Z}[S] \to 0$$

$\mathcal{F}^\bullet$ et $A \otimes \mathbb{Z}[S][0]$ sont quasi-isomorphes, donc

$$R\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, M) = R\mathrm{Hom}(A \otimes \mathbb{Z}[S], M).$$

Le rappel du cours précédent fournit une suite spectrale :

$$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^q(\mathcal{F}^p, M) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{F}^\bullet, M) = \mathrm{Ext}^{p+q}(A \otimes \mathbb{Z}[S], M).$$

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{F}^p, M) = \mathrm{Ext}^q\Big(\bigoplus_{j=1}^{n_p} \mathbb{Z}[A^{r_{pj}} \times S], M\Big) = \prod_{j=1}^{n_p} \mathrm{Ext}^q(\mathbb{Z}[A^{r_{pj}} \times S], M)$$

$$\mathrm{Ext}^{p+q}(A \otimes \mathbb{Z}[S], M) = \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}(A, M)(S)$$

(car $R\underline{\mathrm{Hom}}(A, M)(S) = R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S] \otimes A, M)$)

L'égalité $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{proj}} \times S], M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond(Set)}}(A^{\mathrm{proj}} \times S, M)$

$$= \Gamma(A^{\mathrm{proj}} \times S, M)$$

se dérive et donne

$$R\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{proj}} \times S], M) = R\Gamma(A^{\mathrm{proj}} \times S, M). \quad \blacksquare$$

<u>Démonstration du théorème:</u>

(1) : Si I est fini, on se ramène immédiatement au cas où I est un singleton. On veut alors calculer

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M).$$

On veut montrer que la flèche

$$M[-1] = R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[1], M) \to R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$$

est un isomorphisme, i.e. que

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, M) = 0, \text{ pour } M \text{ gpe ab. discret.}$$

Reformulons-le ainsi : nous voulons voir que la flèche nulle $0 \to \mathbb{R}$ induit un isomorphisme dans $D(\mathrm{Cond(Ab)})$ après application de $R\underline{\mathrm{Hom}}(-, M)$. On a un morphisme induit entre les suites spectrales du corollaire précédent, et il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme, pour tout $r \geq 0$

$$R\Gamma(\mathbb{R}^r \times S, M) \xrightarrow[(0 \times \mathrm{id})^*]{\simeq} R\Gamma(S, M).$$

$$\| \wr$$

$$R\lim_n ([-n,n]^r \times S, M)$$

Il suffit de voir que pour $\forall p, n, r \geq 0$

$$H^p([-n,n]^r \times S, M) \xrightarrow{\simeq} H^p(S, M).$$

Mais on a vu que tout pour tout X compact Hausdorff,

$$R\Gamma(X,\Pi)\ (= R\Gamma_{cond}(X,\Pi)) \simeq R\Gamma_{top}(X,\Pi)$$

pour tout groupe abélien discret Π.

Comme $[-n,n]^r$ est contractible, on en déduit l'isomorphisme voulu.

Pour I quelconque, on écrit le produit comme limite filtrée de produits finis. En considérant de nouveau la suite spectrale et en utilisant la "continuité" de la cohomologie des compacts Hausdorff (fait admis au cours précédent), on en déduit le résultat dans ce cas aussi à partir du cas I fini.

(2) Utilisons la suite spectrale. Nous avons vu au cours précédent que :

$$R\Gamma(X,\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathrm{Cont}(X,\mathbb{R}) & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

pour X compact Hausdorff.

La suite spectrale dégénère donc dès la page E_1 et $R\underline{\mathrm{Hom}}(A,\mathbb{R})(S)$, pour S ext. disc., est calculé par le complexe

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{n_0} \mathrm{Cont}(A^{r_{0j}}\times S,\mathbb{R}) \to \bigoplus_{j=1}^{n_1} \mathrm{Cont}(A^{r_{1j}}\times S,\Pi) \to \cdots$$

Comme les flèches de la résolution de Breen-Deligne ne sont pas explicites, on ne peut pas espérer calculer les groupes de cohomologie de ce complexe "à la main".

On va donc utiliser une astuce : la multiplication par 2 est bornée sur A, mais non bornée sur $\mathbb{R}$. Cela implique déjà qu'un morphisme de A vers $\mathbb{R}$ est nul : son image est bornée et stable par multiplication par 2. Pour implémenter cette idée au niveau des complexes, il nous faut utiliser le fait suivant, qui découle de la construction de la résolution de Breen-Deligne :

<u>Fait</u> : Pour tout groupe abélien A et tout entier $n \geq 1$, si $F(A)$ dénote la résolution de Breen-Deligne de A, alors les applications $n : F(A) \to F(A)$ (multiplication par n sur les termes du complexe) et $[n] : F(A) \to F(A)$ (induite par la multiplication par n sur A et la fonctorialité de $F(-)$) sont homotopes, par une homotopie fonctorielle $h_\bullet : F(A)_\bullet \to F(A)_{\bullet+1}$.

Soit donc $f \in \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathrm{Cont}(A^{r_{ij}} \times S, \mathbb{R})$ avec $df = 0$.

Alors $2f = [2]^*(f) + d(h_{i-1}^*(f))$, i.e

$$f = \frac{1}{2}[2]^*(f) + \frac{1}{2} d(h_{i-1}^*(f)).$$

En itérant,

$$f = \frac{1}{2^n}[2^n]^*(f) + d\Big(\frac{1}{2} h_{i-1}^*(f) + \frac{1}{4} h_{i-1}^*([2]^* f) + \dots + \frac{1}{2^n} h_{i-1}^*([2^{n-1}]^* f)\Big)$$

Notons que $[2^n]^*(f) \in \mathrm{Cont}(A^{r_{ij}} \times S, \mathbb{R})$ reste borné (par $\|f\|$) et
$$h_{i-1}^* : \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathrm{Cont}(A^{r_{ij}} \times S, \mathbb{R}) \to \bigoplus_{j=1}^{n_{i-1}} \mathrm{Cont}(A^{r_{i-1,j}} \times S, \mathbb{R})$$
est un opérateur borné (morphisme continu entre Banach).
À la limite $n \to \infty$, on obtient donc :
$$f = d\left(\tfrac{1}{2} h_{i-1}^*(f) + \tfrac{1}{4} h_{i-1}^*([2]^* f) + \dots\right),$$
comme désiré. ∎

b) Groupes abéliens solides : premiers pas

Les résultats discutés précédemment et ci-dessus montrent que la catégorie des groupes abéliens condensés a d'excellentes propriétés.
Toutefois, le produit tensoriel ne se comporte pas naïvement comme on l'aimerait : par exemple, si p et ℓ sont des nombres premiers, $\underline{\mathbb{Z}_p} \otimes \underline{\mathbb{Z}_\ell}$ est gigantesque (car le groupe abélien sous-jacent est $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_\ell$, produit tensoriel algébrique), mais on aimerait plutôt obtenir quelque chose qui tienne compte de la topologie, à savoir :
$$\underline{\mathbb{Z}_p} \text{ "}\otimes\text{" } \underline{\mathbb{Z}_\ell} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_\ell & \text{si } p = \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(En effet, $\mathbb{Z}_p$, resp. $\mathbb{Z}_\ell$, est le complété p-adique, resp. ℓ-adique, de $\mathbb{Z}$ et ces topologies sont incompatibles pour $\ell \neq p$.)
En topologie, le même problème se pose lorsque l'on travaille avec des modules topologiques sur un anneau top., par exemple avec des espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique : dans

ce cas aussi, il faut munir le produit tensoriel (algébrique) d'une topologie (ce qui peut se faire de multiples manières) et en général le module topologique ainsi fabriqué n'aura pas de bonnes propriétés même si les deux modules de départ en avaient. On remédie en général à cela en travaillant avec des modules complets et en complétant le produit tensoriel. Cela est toutefois délicat, pour la raison mentionnée ci-dessus qu'il y a en général plusieurs façons de topologiser le produit tensoriel.

Pour résoudre ce problème, nous allons définir une sous-catégorie $\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ d'objets "complets", qui conservera les bonnes propriétés catégoriques de $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, mais aura le "bon" produit tensoriel.

Avant d'expliquer comment, il nous faut établir deux lemmes techniques abstraits qui serviront plus loin.

<u>Lemme</u> : Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec colimites. Soit $\mathcal{A}_0$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ formée d'objets compacts projectifs engendrant $\mathcal{A}$. Soit $F : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$ un foncteur équipé d'une transformation naturelle $X \to F(X)$, avec la propriété suivante :

(P) : Pour tout $X \in \mathcal{A}_0$, pour tous $Y, Z \in \mathcal{A}$ qui sont sommes directes d'objets dans l'image de F, et pour tout morphisme $f : Y \to Z$ dans $\mathcal{A}$, de noyau $K \in \mathcal{A}$, l'application $R\mathrm{Hom}(F(X), K) \to R\mathrm{Hom}(X, K)$ est un iso ($\Leftrightarrow$ conoyau).

Notons alors A_F la sous-catégorie pleine de A formée des $Y \in A$ t.q. $\forall X \in A_0$,

$$\mathrm{Hom}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y)$$

est un iso, et soit $D_F(A)$ la sous-catégorie pleine de $D(A)$ formée des $Y \in D(A)$ t.q. $\forall X \in A_0$,

$$R\mathrm{Hom}(F(X), Y) \to R\mathrm{Hom}(X, Y)$$

est un isomorphisme. Alors :

(1) $A_F \subset A$ est une sous-catégorie abélienne stable par limites, colimites et extensions. Les objets $F(X)$, $X \in A_0$, en sont des générateurs compacts projectifs. L'inclusion $A_F \subseteq A$ admet un adjoint à gauche $L : A \to A_F$, qui est l'unique extension de $F : A_0 \to A_F$ préservant les colimites.

(2) Le foncteur $D(A_F) \to D(A)$ est pleinement fidèle, d'image essentielle $D_F(A)$. Un complexe $C \in D(A)$ appartient à $D_F(A)$ ssi $H^i(C) \in D_F(A)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. L'inclusion $D(A_F) = D_F(A) \to D(A)$ admet un adjoint à gauche $D(A) \to D(A_F)$ qui est le foncteur dérivé à gauche de L.

Dém : Stabilité de A_F par limites est claire.

Stabilité par conoyaux : soit $f : Y \to Z$ un morphisme dans A entre objets de A_F. Comme A_0 forme de générateurs compacts projectifs de A, on peut trouver une surjection

$$\bigoplus_i P_i \longrightarrow Z \quad , \quad P_i \in A_0 \ \forall i.$$

Comme $Z \in A_F$, elle s'étend en une surjection

$$\bigoplus_i F(P_i) \longrightarrow Z.$$

Quitte à prendre le pullback, on peut donc supposer $Z = \bigoplus_i F(P_i)$. Répétant l'argument avec Y, on peut aussi supposer Y de la même forme. On a donc une suite exacte

$$0 \to K \to Y \longrightarrow Z \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

avec X, Y sommes directes d'objets dans l'image de F. Par (P) appliquée à $Y \to Z$, $0 \to Z$, $Y \to 0$, on a :

$$R\mathrm{Hom}(F(X), K) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(X, K)$$
$$R\mathrm{Hom}(F(X), Z) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(X, Z)$$
$$R\mathrm{Hom}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(X, Y).$$

On en déduit $R\mathrm{Hom}(F(X), Q) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(X, Q)$, i.e. $Q \in A_F$, et même que $Q \in D^F(A)$.

Réciproquement, si $Y \in D_F(A)$, choisissons une surjection $\bigoplus_i P_i \to Y$ qui s'étend en une surjection $\bigoplus_i F(P_i) \to Y$. Le noyau K de cette flèche est aussi dans

A_F, donc de même on peut trouver une surjection d'une somme directe d'objets dans l'image de F sur K. Ainsi, Y est conoyau d'une flèche entre sommes directes d'objets dans l'image de F.

Ainsi, un objet est dans A_F ssi il est conoyau d'un morphisme entre sommes directes d'objets dans l'image de F. Par conséquent, A_F est aussi stable par sommes directes et donc par colimites (puisqu'engendrées par sommes directes et conoyaux).

Soit $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ suite exacte dans A. Si $X \in A_0$, on a $0 \to \mathrm{Hom}(X, Y') \to \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y'') \to \mathrm{Ext}^1(X, Y')$ et idem avec $F(X)$ au lieu de X. Y' étant conoyau de sommes d'objets dans l'image de F, $Y' \in D_F(A)$ par ce qui précède si $Y' \in A_F$. Donc si $Y', Y'' \in A_F$, Y aussi.

En outre, $F(X) \in A_F$ si $X \in A_0$ et ce sont des générateurs compacts projectifs de A_F.

Soit $Y \in A$. Choisissons une surjection $\bigoplus_i P_i \xrightarrow{f} Y$, $P_i \in A_0$, et une surjection $\bigoplus_j P'_j$ sur le noyau de f, $P'_j \in A_0$.
On a une suite exacte $\bigoplus_j P'_j \to \bigoplus_i P_i \to Y \to 0$.

Comme $\bigoplus_i F(P_i) \in A_F$, la flèche de gauche s'étend en

$$\bigoplus_j F(P'_j) \to \bigoplus_i F(P_i).$$

Notons $L(Y) \in A_F$ le conoyau de cette flèche. Pour tout $Z \in A_F$,

$$\mathrm{Hom}(L(Y), Z) = \ker\Big(\mathrm{Hom}\big(\bigoplus F(P_i), Z\big) \to \mathrm{Hom}\big(\bigoplus_j F(P'_j), Z\big)\Big)$$

$$\Vert \quad (Z \in A_F) \quad \Vert$$

$$= \ker \left(\mathrm{Hom}(\bigoplus_i P_i, Z) \to \mathrm{Hom}(\bigoplus_j P_j, Z) \right)$$
$$= \mathrm{Hom}(Y, Z).$$

Par conséquent, $L(Y)$ indépendant de la présentation choisie et

L définit un adjoint à gauche de $A_F \to A$, qui préserve les colimites comme adjoint à gauche et étend F (et est unique avec ces propriétés puisque A_0 forme une famille de générateurs).

Pour voir que $D(A_F) \to D(A)$ est pleinement fidèle, il suffit de voir que $\forall X \in A_0$, $\forall C \in D(A_F)$, la flèche
$$R\mathrm{Hom}_{D(A_F)}(F(X), C) \to R\mathrm{Hom}_{D(A)}(F(X), C) \simeq R\mathrm{Hom}_{D(A)}(X, C)$$
est un isomorphisme.

En effet tout objet de $D(A_F)$ s'écrit comme colimite (homotopique) de complexes fabriqués en un nombre fini d'étapes en prenant triangles et sommes directes finies d'objets $F(X)[i]$.

Si l'on veut comparer la cohomologie des deux côtés en degré i, on peut remplacer C par $\tau^{\leq i} C$. En écrivant alors C comme limite (homotopique) de ses troncations, on peut supposer C borné et même $C = Y[0]$, $Y \in A_F$. Il faut alors voir que
$$\forall i \geq 0, \quad \mathrm{Ext}^i_{A_F}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_A(X, Y).$$
Les deux côtés s'annulent si $i > 0$ car $F(X)$ est projectif dans A_F et X est projectif dans A. Si $i = 0$, ils sont les mêmes car $Y \in A_F$.

Enfin, considérons la sous-catégorie pleine $D'_F(A) \subset D(A)$

des $C \in DA$ ... $\in A_F$ ... propriétés
de A_F établies ci-dessus que c'est une sous-catégorie triangulée stable par sommes directes et produits. De plus elle est contenue dans $D_F(A)$: en effet si $C \in D'_F(A)$ est borné, on se

ramène à $C = X[0]$, $X \in A_F$. Mais on a vu ci-dessus que $C \in D_F(A)$. On se ramène au cas borné comme ci-dessus.

D'un autre côté, $D_F(A)$ est engendrée par les $F(X)[0]$, $X \in A_0$, par définition. Comme $F(X)[0] \in D'_F(A)$, on en déduit finalement que $D'_F(A) = D_F(A)$.

Le foncteur $D(A_F) \to D(A)$ se factorise par $D'_F(A) = D_F(A)$. Le foncteur induit $D(A_F) \to D'_F(A) = D_F(A)$ est pleinement fidèle. Par l'essentielle surjectivité, on peut se ramener au cas d'un complexe borné car le foncteur commute aux colimites et limites.

<u>Lemme</u> : Soit A, A_0, F comme dans le lemme précédent. Supposons que la condition suivante soit satisfaite :

(P') : $\forall X \in A_0$ et tout complexe C de la forme

$$C : \dots \to C_i \to \dots \to C_1 \to C_0 \to 0,$$

avec C_i somme directe d'objets dans l'image de F pour tout i, alors la flèche naturelle

$$R\mathrm{Hom}(F(X), C) \to R\mathrm{Hom}(X, C)$$

est un isomorphisme. Alors (P) est satisfaite.

Dém : Prenons $f : Y \to Z$ comme dans (P), noyau K.

On peut choisir une résolution

$$\cdots \to B_1 \to B_0 \to K \to 0$$

avec $B_i = \bigoplus_{j \in J_i} X_{i,j}$, $X_{i,j} \in \mathcal{A}_0$, $\forall i$.

Soit $B = (\cdots \to B_1 \to B_0 \to 0)$.

Soit $C_i = \bigoplus_{j \in J_i} F(X_{i,j})$ $\forall i$, et $C = (\cdots \to C_1 \to C_0 \to 0)$

Il y a une flèche naturelle $B \to C$.

On a $R\mathrm{Hom}(X_{i,j}, Y) = R\mathrm{Hom}(F(X_{i,j}), Y)$ $\forall i, j$

(appliquer (P') à $Y[0]$).

Donc $R\mathrm{Hom}(C, Y) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(B, Y)$ et de même

$R\mathrm{Hom}(C, Z) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(B, Z)$.

Donc la flèche $B \to K \subseteq Y$ s'étend uniquement en une flèche $C \to Y$ dont la composée avec $Y \to Z$ s'annule, i.e. $B \to K$ s'étend en $C \to K$. Comme $B \simeq K$ dans $D(A)$, B est un rétract de C dans $D(A)$.

En particulier la condition $R\mathrm{Hom}(F(X), C) \simeq R\mathrm{Hom}(X, C)$ passe à B, ce qui, comme B est une résolution de K, implique que $R\mathrm{Hom}(F(X), K) \simeq R\mathrm{Hom}(X, K)$. ∎