a) Groupes abéliens solides libres

Nous allons mettre en application les lemmes techniques prouvés à la fin du cours précédent. Rappelons que ceux-ci affirment que si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne avec colimites, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ une sous-catégorie formée de générateurs compacts projectifs de $\mathcal{A}$, $F : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$ un foncteur muni d'une transfor-mation naturelle $X \to F(X)$, alors la sous-catégorie $\mathcal{A}_F$ des objets $Y \in \mathcal{A}$ tq $\forall X \in \mathcal{A}_0$, la flèche naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y) \text{ soit un iso}$$

est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}$ stable par limites, colimites et extensions, dont les $F(X)$, $X \in \mathcal{A}_0$, forment une famille de générateurs compacts projectifs et tq l'inclusion $\mathcal{A}_F \subseteq \mathcal{A}$ admette un adjoint à gauche $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_F$ étendant $\mathcal{A}_0$.

\+ énoncés analogues au niveau dérivé, à condition que pr tout complexe $C = \cdots \to C_i \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$, où les C_i sont des sommes directes d'objets dans l'image de F,

$$R\mathrm{Hom}(F(X), C) \to R\mathrm{Hom}(X, C) \text{ soit un iso } \forall X \in \mathcal{A}_0.$$

(condition (P'))

Nous allons le faire en prenant $\mathcal{A} = \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ et pour $\mathcal{A}_0$ la sous-catégorie formée des groupes abéliens condensés $\mathbb{Z}[S]$, S ext. disc.

Il nous faut d'abord définir la fonction F.

Prop : Soit $S = \varprojlim_i S_i$ profini, S_i fini discret $\forall i$. Pour $n \geq 1$, soit $\mathbb{Z}[S_i]_{\leq n} \subset \mathbb{Z}[S_i]$ le sous-ensemble des sommes formelles $\sum_{s \in S_i} n_s [s]$ tq $\sum |n_s| \leq n$. C'est un ensemble fini et les flèches de transition $\mathbb{Z}[S_i] \to \mathbb{Z}[S_j]$ préservent ces sous-ensembles. On a un isomorphisme de groupes abéliens condensés :

$$\mathbb{Z}[S] \simeq \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\varprojlim \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}}_{\text{profini}} \subseteq \varprojlim \mathbb{Z}[S_i]$$

Dém : Par déf, $\mathbb{Z}[S]$ est le faisceautisé de
$$T \mapsto \mathbb{Z}[\mathrm{Cont}(T,S)].$$
Vérifions d'abord que
$$\mathbb{Z}[S] \longrightarrow \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i] \text{ est une injection.}$$
C'est vrai au niveau des groupes abéliens sous-jacents (facile).
Soit $f \in \mathbb{Z}[\mathrm{Cont}(T,S)]$ nul dans $\varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i](T)$.
$\forall t \in T$, $f(t)$ est nul. Écrivons $f = \sum_{j=1}^{k} n_j [g_j]$,
$g_j : T \to S$ fonctions continues distinctes et $n_j \neq 0$ $\forall j$.
Récurrence sur k. $\forall j, j'$ entre 1 et k, soit $T_{jj'} = \{g_j = g_{j'}\}$.
Les $T_{jj'}$ recouvrent T (sinon, pour t dans le complémentaire, les $g_j(t)$ sont tous distincts, donc $\sum n_j [g_j(t)] \neq 0$ contredisant ce que l'on sait).

Ils forment donc un recouvrement de T et sur chacun des $T_{jj'}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

L'union $\bigcup_n \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}$ définit un groupe abélien condensé. Il reçoit une flèche depuis $S = \varprojlim S_i$. Comme $\mathbb{Z}[S]$ est le groupe abélien condensé libre sur S, cela signifie que la flèche $\mathbb{Z}[S] \to \varprojlim \mathbb{Z}[S_i]$ se factorise par $\bigcup_n \varprojlim \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}$, toujours injective.

Montrons que la flèche obtenue $\mathbb{Z}[S] \to \bigcup_n \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}$ est aussi surjective.

Considérons $S^n \times \{-1,0,1\}^n = \varprojlim_i S_i^n \times \{-1,0,1\}^n \to \varprojlim \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}$
$$(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_n) \longmapsto \sum a_i [x_i].$$
C'est une limite cofiltrée de surjections entre ensembles finis, donc une surjection. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S^n \times \{-1,0,1\}^n \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}[S] \arrow[r] & \bigcup_m \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i]_{\leq m}
\end{tikzcd}$$

donc la flèche du bas contient $\varprojlim \mathbb{Z}[S_i]_{\leq n}$ dans son image. Ceci valant pour tout n, la surjectivité est démontrée. ■

Rq : On peut déduire de la proposition qu'il existe un groupe abélien topologique $\mathbb{Z}[S]_{top}$ t.q. $\mathbb{Z}[S] = \underline{\mathbb{Z}[S]_{top}}$. Cela ne nous servira toutefois pas en pratique.

Déf : Soit $S = \varprojlim_i S_i$ profini. On définit :

$$\mathbb{Z}[S]^\bullet = \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i].$$

On a une flèche naturelle $S = \varprojlim_i S_i \to \mathbb{Z}[S]^\bullet$, induisant $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[S]^\bullet$ (cf. la preuve ci-dessus).

On a $\mathbb{Z}[S]^\bullet = \varprojlim_i \mathbb{Z}[S_i] = \varprojlim \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cont}(S_i, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$
$= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$,

ce qui montre que $F : \mathbb{Z}[S] \mapsto \mathbb{Z}[S]^\bullet$ est bien défini (indépendant du choix de la présentation $S = \varprojlim_i S_i$), fonctoriel et que l'on a une transformation naturelle $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[S]^\bullet$.

Th (Specker, Nöbeling) Pour tout S profini, le groupe abélien $C(S, \mathbb{Z})$ des applications continues de S dans $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien libre.

Nous admettrons cet énoncé. Il est évident pour S fini, mais pas en général (même si la preuve n'est pas difficile). Noter qu'il ne peut pas se déduire "formellement du cas fini" par "colimites filtrées" : par exemple tout groupe abélien sans torsion (non nécessairement libre, par exemple $\mathbb{Q}$) peut être écrit comme limite directe de ses sous-groupes de présentation finie, qui étant sans torsion, sont libres.

Cor 1: Pour tout S profini, il existe un ensemble I (de cardinal $|I| \leq 2^{|S|}$) et un isomorphisme de groupes abéliens condensés : $\mathbb{Z}[S]^{\bullet} \simeq \prod_I \mathbb{Z}$.

Cor 2: Soit S profini, $S_\bullet \to S$ hyperrecouvrement de S par des ensembles profinis. Le complexe

$$\cdots \to \mathbb{Z}[S_1]^{\bullet} \to \mathbb{Z}[S_0]^{\bullet} \to \mathbb{Z}[S]^{\bullet} \to 0$$

est exact.

Dém : On sait que le complexe

$$0 \to C(S, \mathbb{Z}) \to C(S_0, \mathbb{Z}) \to C(S_1, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

est exact (car $H^i_{cond}(S, \mathbb{Z}) = 0$, $i > 0$). En appliquant $\underline{RHom}(-, \mathbb{Z})$ et en utilisant le théorème (qui implique $\underline{RHom}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \underline{Hom}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$), on en déduit le résultat. ■

Déf : • Un groupe abélien condensé A sera dit <u>solide</u> si pour tout S ext. discontinu, la flèche de restriction

$$\underline{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\bullet}, A) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathbb{Z}[S], A) = A(S)$$

est un isomorphisme.

• Un complexe $C \in D(\mathrm{Cond}(Ab))$ est dit <u>solide</u> si $\forall S$ ext. disc., la flèche de restriction

$$R\underline{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\bullet}, C) \longrightarrow R\underline{Hom}(\mathbb{Z}[S], C) = R\Gamma(S, C)$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, si $\mathcal{A} = \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, $\mathcal{A}_0 = \{\mathbb{Z}[S],\ S \text{ extr. disc.}\}$, $F : \mathbb{Z}[S] \mapsto \mathbb{Z}[S]^\bullet$, $A \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ est solide ssi $A \in \mathcal{A}_F$ et $C \in D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$ est solide ssi $C \in D_F(\mathcal{A})$. On va voir que (P') est vraie dans ce contexte, et donc que la catégorie des objets solides (au niveau abélien et dérivé) a d'excellentes propriétés (en particulier, que $A \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$ est solide ssi $A[0]$ l'est comme objet de $D(\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab}))$).

Rq : Par le corollaire 2 ci-dessus, on pourrait remplacer "extrêment discontinu" par "profini" dans la définition ci-dessus sans changer la notion d'objet solide.

Rq : On verra aussi qu'on pourrait remplacer $R\mathrm{Hom}$ par $R\underline{\mathrm{Hom}}$ dans la définition. Cela sera utile pour que le "produit tensoriel solide" ait de bonnes propriétés.

Rq : (Intuition) Comme $\mathbb{Z}[S]^\bullet = \mathrm{Hom}(C(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$, on peut penser à $\mathbb{Z}[S]^\bullet$ comme à l'espace des mesures sur S. Si $A = \underline{M} \in \mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, dire que A est solide revient à dire que pour toute $S \xrightarrow{f} M$ continue, et pour toute mesure $\mu \in \mathbb{Z}[S]^\bullet$, on peut définir "$\int f \mu$".

Par exemple, si $S = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ avec sa topologie profinie, f correspond à la donnée d'une suite convergente $m_0, m_1, \dots, m_\infty = \lim_{n\to\infty} m_n$. Le choix de $\mu \in \mathbb{Z}[S]^\bullet$ est le choix des masses $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ des points de $\mathbb{N}$ et sa masse totale a. Formellement, on a :

$$\int f \mu = a_0(m_0 - m_\infty) + a_1(m_1 - m_\infty) + \dots + a m_\infty,$$

i.e. l'on exige que la somme infinie de droite converge dans M. Quitte à translater, on peut supposer $m_\infty = 0$. Alors on voit que la somme $\sum a_i m_i$ converge, pour tout choix de $a_i \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que la condition d'être solide est en quelque sorte par nature une condition non-archimédienne.

Notez toutefois que la définition d'un objet solide est plus forte que d'imposer l'existence de telles limites : plutôt, on demande qu'il soit possible de définir de telles limites de façon consistante pour toutes les μ sur S simultanément.

Le reste de cette séance sera consacrée à vérifier que la propriété (P') est satisfaite dans ce contexte.

Soit $C = (\dots \to C_i \to \dots \to C_1 \to C_0 \to 0)$ un complexe tel que $\forall i$, C_i est somme directe de groupes abéliens condensés de la forme $\mathbb{Z}[T]^\bullet$, T ext. disc.

Nous voulons montrer que :

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^\bullet, C) \xrightarrow{\sim} R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], C),$$

pour tout S extr. disc. ($\Leftarrow$ profini). $\qquad \overset{\|}{R\Gamma(S, C)}$

Rq : Même si $C = \mathbb{Z}$ ($= \mathbb{Z}[*]^\bullet$), le résultat n'est pas évident : on a :

$$\mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z}) = \varinjlim_i \mathrm{Cont}(S_i, \mathbb{Z}) = \varinjlim \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S_i], \mathbb{Z})$$
$$\to \mathrm{Hom}(\varprojlim \mathbb{Z}[S_i], \mathbb{Z})$$
$$= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S]^\bullet, \mathbb{Z}).$$

Donc l'existence du prolongement est facile, mais pas l'unicité : il faut voir que toute $\mathbb{Z}[S]^\bullet \to \mathbb{Z}$ se factorise par un $\mathbb{Z}[S_i]$!

Notons que $\mathbb{Z}[T]^\bullet \simeq \prod_I \mathbb{Z}$, pour un certain ensemble I (Corollaire 1). On va en fait autoriser les termes de C à être sommes directes de produits de $\mathbb{Z}$.

Rappelons que $\mathbb{Z}[S]^\bullet = \underline{\mathrm{Hom}}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

On notera : $M(S, \mathbb{R}) = \underline{\mathrm{Hom}}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \simeq \prod_I \mathbb{R}$

$M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Hom}}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \prod_I \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

(par le théorème).

Par exactitude des produits (AB4*) dans Cond(Ab), on a une suite exacte

$$(*) \quad 0 \to \mathbb{Z}[S]^\bullet \to M(S, \mathbb{R}) \to M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to 0.$$

Nous allons prouver le résultat suivant.

(R) Soit $C = (\cdots \to C_i \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0)$ un complexe tq $\forall i$, C_i soit somme directe de groupes abéliens condensés de la forme $\prod_I \mathbb{Z}$, I ensemble (variable). Alors

$$R\underline{Hom}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), C)(S') = R\Gamma(S\times S', C)[-1],$$

$\forall S, S'$ profinis.

Montrons tout d'abord que (R) $\Rightarrow$ (P').

En prenant $S = \{*\}$, on obtient déjà que pour tout S',

$$R\underline{Hom}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, C)(S') = R\Gamma(S', C)[-1] = R\underline{Hom}(\mathbb{Z}[1], C)(S').$$

Donc $R\underline{Hom}(\mathbb{R}, C) = 0$.

Or $M(S,\mathbb{R})$ est un module sur l'anneau condensé $\mathbb{R}$; donc

$$R\underline{Hom}(M(S,\mathbb{R}), C) = R\underline{Hom}_{\mathbb{R}}(M(S,\mathbb{R}), R\underline{Hom}(\mathbb{R}, C)) = 0$$

Donc, grâce à la suite exacte $(*)$ ci-dessus, (R) se réécrit

$$R\underline{Hom}(\mathbb{Z}[S]^*, C)(S') = R\Gamma(S\times S', C)$$

ce qui implique (P') en prenant $S' = \{*\}$.

(Notons donc que l'on va prouver un résultat un peu plus fort, ce qui sera utile plus loin).

Maintenant nous démontrons (R).

Commençons par le cas $C = M[0]$, $M = \bigoplus_{i\in I} \prod_{j\in J_i} \mathbb{Z}$.

Pourquoi avoir remplacé (P') par (R), i.e. pourquoi $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est-il plus manipulable que $\mathbb{Z}[S]^\circ$?

La raison en est que $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est <u>pseudo-cohérent</u> :

<u>Déf</u> : Soit A une catégorie abélienne avec colimites. Un objet $X \in A$ est dit <u>pseudo-cohérent</u> si $\mathrm{Ext}^i_A(X, -) : A \to Ab$ commute aux colimites filtrées, pour tout $i \geq 0$.

Ici, $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \prod_k \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact Hausdorff. En utilisant la résolution de Breen-Deligne (cours précédent) et la suite spectrale qui s'en déduit, on voit qu'il suffit pour montrer que $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est pseudo-cohérent de montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est pseudo-cohérent pour tout X compact Hausdorff. Mais si l'on choisit un hyperrecouvrement de X par des ext. discontinus, cela fournit une résolution simpliciale de $\mathbb{Z}[X]$ par des $\mathbb{Z}[S]$, S ext.-disc. Comme $\mathbb{Z}[S]$ est compact projectif pour S ext.-disc., on en déduit que $\mathbb{Z}[X]$ est pseudo-cohérent.

Donc $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est pseudocohérent et en fait le même argument montre que $M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}[S']$ est pseudo-cohérent, pour tout S' profini. Nous allons exploiter cela tout de suite, S étant une somme directe a priori infinie.

On écrit :

$$\underline{R\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}),C)(S') = R\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}[S'],C)$$

$$= R\mathrm{Hom}\Big(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}[S'], \bigoplus_I \prod_{J_i}\mathbb{Z}\Big)$$

$$\underset{\text{pseudo-coh}}{=} \bigoplus_I R\mathrm{Hom}\Big(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}[S'], \prod_{J_i}\mathbb{Z}\Big)$$

$$= \bigoplus_I \prod_{J_i} \underbrace{R\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}[S'],\mathbb{Z})}_{= R\Gamma\big(S', \underbrace{\underline{R\mathrm{Hom}}(\prod_K \mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{= \bigoplus_K \mathbb{Z}[-1]\, = \,\mathrm{Cont}(S,\mathbb{Z})[-1]}\big)}$$

calcul d'extensions du cours précédent !

So finally we get

$$\underline{R\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}),C)(S') \simeq \bigoplus_I \prod_{J_i} \Gamma(S\times S',\mathbb{Z})$$

On the other hand,

$$R\Gamma\Big(S, \bigoplus_I \prod_{J_i}\mathbb{Z}\Big) = \bigoplus_I \prod_J \mathrm{Cont}(S,\mathbb{Z})[0].$$

donc nous obtenons bien (R) dans ce cas particulier.
On en déduit par récurrence le cas où C est borné.
Dans le cas général, on va vérifier que $R\Gamma(S,C)$

et $R\underline{\mathrm{Hom}}(M(S, \mathbb{R}/\mathbb{Z}), C)$ sont concentrés en degrés (cohomologiques) ≤ 1 pour tout S profini. Cela nous suffira : en effet pour tout i nous connaissons le résultat $\sigma_{\leq i} C$ (qui est borné, car C est borné supérieurement) et le cône $\sigma_{\geq i+1} C$ de $\sigma_{\leq i} C \to C$ est tel que les deux membres sont supportés en degrés cohomologiques $\leq -i$, si l'assertion est vraie (plus le fait que pour S' ext. disc., évaluer en S' est exact).

Donc pour chaque indice donné, nous connaissons le résultat en ce degré en prenant i suffisamment grand.

Prouvons l'assertion. Écrivons pour tout $i \leq 0$,

$$C_i = \bigoplus_{J_i} \prod_{K_{ij}} \mathbb{Z} \quad , \quad J_i, K_{ij} \text{ ensembles.}$$

Notons $C_{i,\mathbb{R}} := \bigoplus_{J_i} \prod_{K_{ij}} \mathbb{R}$.

Pour chaque i, la différentielle $d_i : C_{i+1} \to C_i$ s'étend uniquement en $d_{i,\mathbb{R}} : C_{i+1,\mathbb{R}} \to C_{i,\mathbb{R}}$, i.e.

$$\mathrm{Hom}(C_{i+1}, C_{i,\mathbb{R}}) \simeq \mathrm{Hom}(C_{i+1,\mathbb{R}}, C_{i,\mathbb{R}}).$$

On peut supposer $C_{i+1} = \prod \mathbb{Z}$ et alors il suffit de prouver que $R\mathrm{Hom}(\prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}, C_{i+1,\mathbb{R}}) = 0$.

Mais $\prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est pseudo-cohérent, donc on peut supposer $C_{i+1,\mathbb{R}} = \prod \mathbb{R}$ et donc en fait $C_{i+1,\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Mais alors $R\underline{Hom}(\prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}) = 0$, cf. cours précédent!

On a donc un complexe $C_{\mathbb{R}}$ et donc aussi un complexe $C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. On va montrer que $R\underline{Hom}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), C_{\mathbb{R}})$, $R\underline{Hom}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$, $R\Gamma(S, C_{\mathbb{R}})$ et $R\Gamma(S, C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ sont en degrés (cohomologiques) ≤ 0. Cela suffira, puisque

$$0 \to C \to C_{\mathbb{R}} \to C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \to 0$$

est exacte.

En écrivant $C_{\mathbb{R}}$, $C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ comme limite de leurs tronqués $\tau_{\leq i} C_{\mathbb{R}}$, $\tau_{\leq i} C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, on peut les supposer finis.

Il suffit donc de prouver le résultat pour leurs termes. On va le faire pour $\ker(d_{i,\mathbb{R}})$ ou $\ker(d_{i,\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$, le cas d'un $C_{i,\mathbb{R}}$ ou $C_{i,\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ étant analogue (et plus facile).

$R\Gamma(S,-)$ et $R\underline{Hom}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}),-)$ commutent aux colimits filtrées par pseudocohérence de $\mathbb{Z}[S]$ et $M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On peut donc supposer (écrire une somme directe comme colimite filtrée de sommes directes finies) J_{i+1} fini, i.e. que $C_{i+1} = \prod_{K_{i+1}} \mathbb{Z}$. Alors $d_i : C_{i+1} \to C_i$

$$C_i = \bigoplus_{j\in J_i} \prod_{K_{ij}} \mathbb{Z}$$

se factorise par la somme directe finie, donc on peut aussi supposer $C_i = \prod_{K_i} \mathbb{Z}$.

Alors $d_{i,\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ est un morphisme entre groupes abéliens compacts, donc son noyau est un groupe abélien compact. Donc par le théorème du cours précédent, $R\underline{\mathrm{Hom}}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \ker d_{i,\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ est concentré en degrés ≤ 1 (choisir une résolution de A comme noyau de $\prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cela suffit pour conclure, puisque $\ker d_{i,\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ vient avec un shift $[i]$ (et si $i=0$, il est de la forme $\bigoplus \prod \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donc on a la borne ≤ 0).

Pour analyser $\ker d_{i,\mathbb{R}}$, notons que $d_i : \prod_{K_{i+1}} \mathbb{Z} \to \prod_{K_i} \mathbb{Z}$ se dualise en $d_i^* : \bigoplus_{K_i} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{K_{i+1}} \mathbb{Z}$. Le conoyau de l'application correspondante $d_{i,\mathbb{R}}^* : \bigoplus_{K_i} \mathbb{R} \to \bigoplus_{K_{i+1}} \mathbb{R}$ est le conoyau d'un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, donc de la forme $\bigoplus \mathbb{R}$; par conséquent, en dualisant à nouveau $\ker d_{i,\mathbb{R}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\bigoplus \mathbb{R}, \mathbb{R}) = \prod \mathbb{R}$.
Par le cours précédent, cela implique

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(M(S,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \ker d_{i,\mathbb{R}}) = 0,$$

et aussi que $R\Gamma(S, \ker d_{i,\mathbb{R}})$ est concentré en degré 0.