a) Groupes abéliens solides, suite et fin

Commençons par une proposition résumant certains résultats obtenus au cours de la séance précédente.

<u>Prop</u> : 1) Les objets compacts projectifs de Solid sont les groupes abéliens condensés de la forme $\prod_I \mathbb{Z}$, I ensemble.

2) La catégorie $D(\mathrm{Solid})^\omega$ des objets compacts dans $D(\mathrm{Solid})$ est équivalente à la catégorie opposée de $D^b(\mathbb{Z})$ via le foncteur
$$D^b(\mathbb{Z})^{op} \longrightarrow D(\mathrm{Solid})$$
$$C \longmapsto R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{Z})$$

3) La solidification dérivée $\mathbb{R}^{L\blacksquare}$ de $\mathbb{R}$ est nul.

4) Soit $C \in D(\mathrm{Solid})$. Pour tout ensemble profini S, la flèche naturelle $R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^\blacksquare, C) \to R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], C)$ est un isomorphisme.

<u>Dém</u> : 1) On sait que les $\mathbb{Z}[S]^\blacksquare$, S ext. disc., forment une famille de générateurs compacts projectifs de Solid. Par le th. de Specker-Nöbeling, pour un tel S, $\mathbb{Z}[S]^\blacksquare \simeq \prod_I \mathbb{Z}$ pour I un ensemble. Soit I un ensemble arbitraire ; en choisissant S ext. disc de cardinal assez grand, on peut écrire $\prod_I \mathbb{Z}$ comme rétract de $\mathbb{Z}[S]^\blacksquare$. Donc $\prod_I \mathbb{Z}$ est compact projectif. Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Solid}$ compact projectif.

Choisissons une surjection $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[S_i]' \to P$, ce que l'on peut par l'hypothèse P compact et le fait que les $\mathbb{Z}[S_i]^\bullet$ sont des générateurs. Le terme de gauche est de la forme $\prod_I \mathbb{Z}$; P étant projectif, c'est un rétract de $\prod_I \mathbb{Z}$. C'est donc lui-même un produit de copies de $\mathbb{Z}$ (dualiser et utiliser qu'un sous-groupe d'un groupe abélien libre est libre).

2) Notons que $D(\mathrm{Solid})^\omega$, resp. $D^b(\mathbb{Z})$, est formée des complexes bornés dont les termes sont de la forme $\prod_I \mathbb{Z}$, resp. $\bigoplus_I \mathbb{Z}$. On vérifie que $R\underline{\mathrm{Hom}}(-,\mathbb{Z})$ et $R\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ sont quasi-inverses de l'autre : cela se ramène à

$$R\mathrm{Hom}\Big(\prod_I \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\Big) \simeq \bigoplus_I \mathbb{Z} \quad \text{(calcul déjà fait en groupes abéliens condensés)}$$

$$\text{et} \quad R\underline{\mathrm{Hom}}\Big(\bigoplus_I \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\Big) \simeq \underbrace{\prod_I \mathbb{Z}}_{\text{trivial}}$$

(3) On veut montrer que

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, C) = 0 \quad \text{pour tout } C \in D(\mathrm{Solid}).$$

On peut supposer C borné supérieurement (en degré fixé i, seul contribue $\tau^{\leq i} C$) et donc, quitte à décaler, $C = \tau^{\leq 0} C$. Choisissons une résolution projective du complexe C (en choisissant de façon compatible une résolution de chacun des termes et en formant le complexe total). On peut donc supposer que tous les termes sont des sommes directes de produits de $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on peut appliquer le calcul du cours précédent : $R\underline{Hom}(K, C) = 0$.

(4) De nouveau, on peut supposer que C est un complexe dont tous les termes sont sommes directs de produits de copies de $\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que pour tout S' profini, $R\underline{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare}, C)(S') = R\Gamma(S \times S', C)$. Mais cela a été vu lors de la preuve de (P'). ∎

Rq : En particulier, comme conséquence de 1) et du th. de Specker-Nöbeling, $\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare}$ est compact projectif pour tout S profini (à contraster avec le fait que dans $Cond(Ab)$, ce n'est pas forcément vrai).

Th : (1) On peut munir Solid de façon unique d'un produit tensoriel symétrique monoïdal $\otimes^{\blacksquare}$ tel que le foncteur de solidification soit symétrique monoïdal, comme foncteur $Cond(Ab) \to Solid$.

(2) Énoncé analogue au niveau dérivé. De plus, $\otimes^{L\blacksquare}$ est le foncteur dérivé à gauche de $\otimes^{\blacksquare}$.

Dém : Unicité : si $(\,)^{\blacksquare}$ est symétrique monoïdal, on doit avoir $\forall M, N \in Cond(Ab)$, $(M \otimes N)^{\blacksquare} \simeq M^{\blacksquare} \otimes^{\blacksquare} N^{\blacksquare}$

(et idem au niveau dérivé). Donc on a pour M, N solides, $M \otimes^{\blacksquare} N = (M \otimes N)^{\blacksquare}$ ce qui montre l'unicité.

Existence : Pour $M, N \in$ Solid, posons
$$M \overset{\blacksquare}{\otimes} N := (M \otimes N)^{\blacksquare}.$$
On veut voir que $M \mapsto M^{\blacksquare}$ est symétrique monoïdal, i.e. que la flèche $(M \otimes N)^{\blacksquare} \to (M^{\blacksquare} \otimes N^{\blacksquare})^{\blacksquare}$ est un iso. En la décomposant en deux morceaux :
$$(M \otimes N)^{\blacksquare} \to (M^{\blacksquare} \otimes N)^{\blacksquare} \to (M^{\blacksquare} \otimes N^{\blacksquare})^{\blacksquare}$$
on voit qu'il suffit, par symétrie des rôles de M et N, de montrer que la première est un isomorphisme.

Comme $(- \otimes -)$ et $(-)^{\blacksquare}$ commutent aux colimites, on peut supposer $M = \mathbb{Z}[S]$, $N = \mathbb{Z}[T]$, S, T ext. disc. On veut alors montrer :
$$\mathbb{Z}[S \times T]^{\blacksquare} \simeq (\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} \otimes \mathbb{Z}[T])^{\blacksquare},$$
i.e. que $\forall A \in$ Solid,
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} \otimes \mathbb{Z}[T], A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[S \times T], A) \\ \| & & \| \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare}, A)(T) & & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], A)(T) \end{array}$$
ce qui est vrai par le point (4) de la proposition précédente.

Le même argument s'applique au version dérivé. Pour le dernier point, il faut vérifier que
$$M \otimes^{L\blacksquare} N = M \overset{\blacksquare}{\otimes} N$$
si M et N sont compacts projectifs. Mais on

peut supposer $M = \mathbb{Z}[S]$, $N = \mathbb{Z}[T]$, S, T ext. disc, auquel cas $M \otimes^{L\blacksquare} N = (M \otimes N)^{L\blacksquare} = \mathbb{Z}[S\times T]^\blacksquare$. ∎

<u>Rq</u> : Notons qu'il était important pour cet énoncé d'avoir montré l'énoncé (4) de la proposition ci-dessus, plus fort que la définition.

La proposition qui suit est simple mais fondamentale.

<u>Prop</u> : Soit $M = \prod_I \mathbb{Z}$, $N = \prod_J \mathbb{Z} \in \mathrm{Solid}$. Alors

$$M \otimes^{L\blacksquare} N \simeq \prod_{I\times J} \mathbb{Z}.$$

<u>Dém</u> : Écrivons $M = \underline{\mathrm{Hom}}(M', \mathbb{Z})$, $N = \underline{\mathrm{Hom}}(N', \mathbb{Z})$ avec $M' = \bigoplus_I \mathbb{Z}$, $N' = \bigoplus_J \mathbb{Z}$.

On veut montrer que l'application naturelle

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M', \mathbb{Z}) \otimes^{L\blacksquare} \underline{\mathrm{Hom}}(N', \mathbb{Z}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(M' \otimes N', \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Écrivons M' comme rétract de $\mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z})$ et N' comme rétracte de $\mathrm{Cont}(T, \mathbb{Z})$. On peut donc se ramener à $M' = \mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z})$, $N' = \mathrm{Cont}(T, \mathbb{Z})$. Alors

$$M' \otimes N' = \mathrm{Cont}(S\times T, \mathbb{Z})$$

donc on veut prouver que

$$\mathbb{Z}[S]^\blacksquare \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{Z}[T]^\blacksquare \simeq \mathbb{Z}[S\times T]^\blacksquare,$$

ce que l'on sait être vrai. ∎

<u>Rq</u> : ⚠ On ne sait pas si $\mathbb{Z}[S]^\blacksquare$, S ext. disc., est plat.

Quelques calculs de produits tensoriels solides :

(a) $\mathbb{Z}[[U]] \overset{L\blacksquare}{\otimes} \mathbb{Z}[[T]] \simeq \mathbb{Z}[[U,T]]$.

Notons que comme groupe abélien solide, $\mathbb{Z}[[U]] \simeq \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ et idem pour $\mathbb{Z}[[T]]$. L'isomorphisme suit donc de la proposition précédente.

(b) Soit p un nombre premier.

$$\mathbb{Z}_p \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{Z}[[T]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]].$$

On a une suite exacte courte dans Solid :

$$0 \to \mathbb{Z}[[U]] \xrightarrow{T-p} \mathbb{Z}[[U]] \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

En utilisant (a), on en déduit (b).

(c) Soit p, ℓ deux nombres premiers.

$$\mathbb{Z}_p \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{Z}_\ell = \begin{cases} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_\ell & \text{si } p = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $0 \to \mathbb{Z}[[T]] \xrightarrow{T-\ell} \mathbb{Z}[[T]] \to \mathbb{Z}_\ell \to 0$ et on utilise (b).

(d) Soit p un nombre premier.

$$\mathbb{Z}_p \overset{L\blacksquare}{\otimes} \mathbb{R} = 0.$$

En effet $\mathbb{Z}_p \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{R} = (\mathbb{Z}_p \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{R}^{L\blacksquare})^{L\blacksquare} = 0$

car $\mathbb{R}^{L\blacksquare} = 0$ comme vu ci-dessus.

Un <u>exemple</u> intéressant (et un avertissement) :

Soit X un ensemble condensé. À quoi ressemble $\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare}$?

- Si $X = S$, S ext.-disc., on sait que
$$\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare} = \mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} \text{ est concentré en}$$
degré 0.

- Soit $C \in D(\mathrm{Solid})$ pseudocohérent.
Alors $R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{Z}) \in D^{\geq 0}(\mathbb{Z})$
(en effet, C est quasi-isomorphe à un complexe en degré ≤ 0 dont les termes sont sommes directes finies de $\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare}$, S ext.-disc. En degré fixé, seul un nombre fini de termes contribuent, donc il suffit de vérifier l'assertion pour $C = \mathbb{Z}[S]^{\blacksquare}$.)
De plus, le foncteur $R\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbb{Z})$ est pleinement fidèle sur les pseudocohérents. Pour le voir, il suffit de prouver que $R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \leftarrow C$.
En effet, on écrit $C = \lim_n \tau_{\geq -n} C$
$$R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \lim_n \tau_{\geq -n} R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$
Comme $R\underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathbb{Z}) \in D^{\geq 0}(\mathbb{Z})$, ses groupes de

cohomologie sont discrets, et $\mathrm{Ext}^i(A,\mathbb{Z}) = 0$ $i \geq 2$ pour A groupe abélien discret. Donc

$\tau_{\geq -n} R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ et

$R\underline{\mathrm{Hom}}(\tau_{\leq n} R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ sont cofinaux.

Idem avec $\tau_{\leq n} R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z})$ et $R\underline{\mathrm{Hom}}(\tau_{\geq -n} C,\mathbb{Z})$ (trivialement cette fois-ci). Donc

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(C,\mathbb{Z})) \simeq \lim_n R\underline{\mathrm{Hom}}(R\underline{\mathrm{Hom}}(\tau_{\geq -n} C,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

et il suffit donc de montrer l'énoncé pour C borné. Mais alors on se ramène à $C = \mathbb{Z}[S]^\bullet$, où l'on connaît le résultat.

- Soit X un CW complexe fini. Alors $\mathbb{Z}[X]^{L\bullet}$ est pseudocohérent (en effet, X est compact Hausdorff, donc $\mathbb{Z}[X]$ est pseudocohérent dans $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$, comme déjà vu ; puis appliquer $(-)^{L\bullet}$ en utilisant le premier point).

Le complexe d'homologie singulière de X est aussi pseudo-cohérent (c'est un complexe borné, il suffit de le vérifier pour les $H_i(X)$, qui sont des groupes abéliens de rang fini). Mais notons que

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare}, \mathbb{Z}) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z})$$

$\mathbb{Z}$ solide

$$\simeq R\Gamma(X, \mathbb{Z})$$

$$= R\underline{\mathrm{Hom}}(H_\bullet(X), \mathbb{Z})$$

Par le point précédent, on en déduit

$$\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare} \simeq H_\bullet(X)$$

Les deux côtés commutent aux colimites filtrées,

donc $\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare} \simeq H_\bullet(X)$

pour tout CW complexe X.

Ainsi, la solidification de $\mathbb{Z}[X]$ récupère l'homologie singulière de X ! Cela montre aussi qu'en général, la solidification dérivée d'un groupe abélien condensé peut vivre en degrés arbitrairement négatifs.

Application amusante

Problème de Whitehead :

Soit A un groupe abélien. Supposons

$$\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{Z}) = 0.$$

A est-il un groupe abélien libre ?

Shelah : le problème est indépendant de ZFC !
(i.e. on peut ajouter un axiome à ZFC sans changer sa consistance ou non consistance et montrer que le problème a une réponse positive, et de même avec négative avec un autre axiome indépendant de ZFC).

Clausen-Scholze : A groupe abélien, vu comme groupe abélien discret dans $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$.

Si $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Z}) = 0$, A est libre.

dans $\mathrm{Cond}(\mathrm{Ab})$

<u>Dém</u> : Choisissons une résolution :

$$0 \to \bigoplus_J \mathbb{Z} \to \bigoplus_I \mathbb{Z} \to A \to 0$$

(un sous-groupe d'un groupe abélien libre est libre)

Appliquons $R\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbb{Z})$. Sous l'hypothèse, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbb{Z}) \to \prod_I \mathbb{Z} \to \prod_J \mathbb{Z} \to 0.$$

Les termes sont dans Solid (clair pour les deux derniers, donc aussi pour le premier par stabilité par noyaux), donc on a une suite exacte dans Solid, qui se scinde puisque $\prod_J \mathbb{Z}$ est projectif dans Solid !

Donc $R\underline{Hom}(A, \mathbb{Z}) = \underline{Hom}(A, \mathbb{Z})$ est un facteur direct de $\prod_I \mathbb{Z}$. En réappliquant $R\underline{Hom}(-, \mathbb{Z})$, on obtient que A est un facteur direct de $\bigoplus_I \mathbb{Z}$, donc est libre.