Modules solides : théorie relative

Nous avons vu au cours précédent qu'à tout morphisme $R \to A$ entre $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini, on pouvait associer un anneau analytique $(A,R)_\blacksquare$. Aujourd'hui, nous allons construire différents foncteurs sur les catégories de modules associées.

<u>Th</u> : Soit $R \to S \to A$ morphismes entre $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini. Le foncteur oubli :

$$j_* : D((A,S)_\blacksquare) \to D((A,R)_\blacksquare)$$

(toutes deux sous-cat. pleines de $D(\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}})$)

admet un adjoint à gauche

$$j^* : D((A,R)_\blacksquare) \to D((A,S)_\blacksquare)$$
$$= - \otimes^L_{(A,R)_\blacksquare} (A,S)_\blacksquare$$

Cet adjoint admet lui-même un adjoint à gauche

$$j_! : D((A,S)_\blacksquare) \to D((A,R)_\blacksquare),$$

tel que $\quad j_! j^* M = M \otimes_{(A,R)_\blacksquare} j_! A.$

<u>Dém</u> : Comme la fois précédente, nous commencerons par montrer ce résultat dans un cas particulier crucial, puis nous ramènerons à celui-ci.

1) Cas particulier : $R = \mathbb{Z}$, $S = A = \mathbb{Z}[T]$.

Le fait que $j^* = - \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\blacksquare} A_\blacksquare$ est un adjoint à gauche de j_* a déjà été vu : pour $M \in D((A,\mathcal{I})_\bullet)$, $N \in D(A_\bullet)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{D((A,\mathcal{I})_\bullet)}(M, j_* N) = \mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}})}(i_{1*}M, i_{2*}N)$$

i_{2*} et $- \otimes_A A_\bullet$ adjoints $\longrightarrow$ $= \mathrm{Hom}_{D(A_\bullet)}(i_{1*}M \otimes_A A_\bullet, N)$

proposition du cours précédent $\longrightarrow$ $= \mathrm{Hom}_{D(A_\bullet)}(M \otimes_{(A,\mathcal{I})_\bullet} A_\bullet, N)$,

où $i_{1*} : D((A,\mathcal{I})_\bullet) \longrightarrow D(\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}})$ sont les foncteurs
$i_{2*} : D(A_\bullet) \longrightarrow D(\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{cond}})$ inclusion.

Lemme 1 : Le noyau du foncteur

$$j^* : D((A,\mathcal{I})_\bullet) \longrightarrow D(A_\bullet)$$

est la sous-catégorie pleine de $D((A,\mathcal{I})_\bullet)$ formée des M ayant une structure de A_∞-module.

Dém : Notons tout d'abord que comme A_∞ est "idempotent", i.e. :

$$A_\infty \otimes^L_{(A,\mathcal{I})} A_\infty = A_\infty, \quad \text{(cours précédent)}$$

les A_∞-modules forment bien une sous-catégorie pleine de $D((A,\mathcal{I})_\bullet)$: $M \in D((A,\mathcal{I})_\bullet)$ a au plus une structure de A_∞-module et cela arrive lorsque l'application

$$M \to M \otimes_{(A,\mathcal{I})_\bullet} A_\infty \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Soit $M \in D((A,\mathcal{I})_\bullet)$ un A_∞-module. Alors

$$j^*M = j^*(M \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\infty)$$
$$= M \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\infty \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\bullet .$$

Or $A_\infty \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\bullet = 0$, comme on l'a vu au cours précédent. Donc $j^*M = 0$.

Montrons la réciproque.

La sous-catégorie $\ker(j^*)$ est une sous-catégorie triangulée de $D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$. Soit $M \in \ker(j^*)$. Comme $D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$ est engendrée par les objets $(A,\mathbb{Z})_\bullet[S]$, S ext-disc., il existe S ext-disc., $n \in \mathbb{Z}$ et un morphisme non nul

$$(A,\mathbb{Z})_\bullet[S][n] \to M$$

si M est non nul.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r] & (A,\mathbb{Z})_\bullet[S][n] \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*(A,\mathbb{Z})_\bullet[S][n] \arrow[r] \arrow[d] & Q[1] \\
K \arrow[r] & M \arrow[r] & j_*j^*M \arrow[r] & K[1]
\end{tikzcd}$$

Par (TR3), il existe un morphisme $Q \to K$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r] \arrow[d] & (A,\mathbb{Z})_\bullet[S][n] \arrow[r] \arrow[d] & j_*j^*(A,\mathbb{Z})_\bullet[S][n] \arrow[r] \arrow[d] & Q[1] \arrow[d] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

$$K \longrightarrow M \longrightarrow j_*j^*M \longrightarrow K[1]$$

commute. Comme $j^*M = 0$ par hypothèse, $K \simeq M$ et donc on a une flèche non nulle

$$\mathrm{coker}\left((A,\mathbb{Z})_\bullet[S] \to j_*j^*(A,\mathbb{Z})_\bullet[S]\right)[\text{shift}] \to M.$$

Par conséquent, la catégorie triangulée $\ker(j^*)$ est engendrée par les objets de la forme

$$\mathrm{coker}\left((A,\mathbb{Z})_\bullet[S] \to j_*j^*(A,\mathbb{Z})_\bullet[S]\right),$$

S ext. disc.

<u>Fait</u>: Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée avec sommes directes, munie d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'objets tq $\oplus E_i$ engendre $\mathcal{D}$. Alors tout objet X de $\mathcal{D}$ s'écrit comme colimite homotopique de $X_n \in \mathcal{D}$, avec X_1 = somme directe de décalés (shifts) des E_i et chaque morphisme de transition $X_n \to X_{n+1}$ se complète en un triangle distingué

$$Y_n \to X_n \to X_{n+1} \to Y_n[1]$$

[Stacks Project 09SN]

où Y_n est de la même forme que X_1.

<u>Dém</u>: On pose $X_1 = \bigoplus_{(i,m,\varphi)} E_i[m]$, somme directe sur tous les triplets (i,m,φ), $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi : E_i[m] \to X$. On a une flèche $X_1 \to X$. Si $X_n \to X$ est défini, on pose $Y_n = \bigoplus_{(i,m,\varphi)} E_i[m]$, somme directe sur tous les

$i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi : E_i[m] \to X_n$ tq $j[m] \to \quad \to X = 0$.
Choisissons un triangle distingué $Y_n \to X_n \to X_{n+1} \to Y_n[1]$ et X_{n+1} un morphisme tq $X_n \to X_{n+1} \to X$ soit le morphisme donné $X_n \to X$: cela est possible par définition de Y_n. On obtient

$$\mathrm{hocolim}\, X_n \to X.$$

Définissons C de sorte que l'on ait un triangle distingué

$$C \to \mathrm{hocolim}\, X_n \to X \to C[1]$$

Soit $E_i[m] \to C$ morphisme. Comme E_i est compact, la composée $E_i[m] \to C \to \mathrm{hocolim}\, X_n$ se factorise par un X_n. Alors par définition de Y_n, la composée $E_i[m] \to X_n \to X_{n+1}$ est nulle. Donc $(E_i[m] \to C \to \mathrm{hocolim}\, X_n) = 0$ et le morphisme $E_i[m] \to C$ se factorise par $X[-1]$. Par construction de X, ce morphisme se relève à $\mathrm{hocolim}\, X_n$ et donc notre morphisme de départ $E_i[m] \to C$ est nul. Donc C est nul (puisque $\bigoplus E_i$ est un générateur). ∎

Appliquons ce fait à $\mathcal{D} = \ker(j^*)$, les E_i donnés par $\mathrm{cokér}((A, \mathbb{Z})_\bullet[S] \to j_* j^* (A, \mathbb{Z})_\bullet[S])$, S extr. discontinus, et $X = M \in \ker(j^*)$. Comme vu dans le cas précédent, X_n et Y_n pour tout n sont des A_∞-modules.

Comme dire que $N \in D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$ est un A_∞-module est équivalent à dire que la flèche naturelle $N \to N \overset{L}{\otimes}_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\infty$ est un isomorphisme, on en déduit par récurrence que X_n est un A_∞-module pour tout n. Comme $- \overset{L}{\otimes}_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\infty$ commute aux colimites, il en est donc de même pour $X = M$.

■ (Lemme 1)

Lemme 2 : Considérons l'endofoncteur

$$j_! : D((A,\mathbb{Z})_\bullet) \longrightarrow D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$$
$$M \longmapsto M \otimes_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} (A_\infty / A)[-1].$$

Ce foncteur se factorise en un foncteur pleinement fidèle encore noté $j_! \quad : D(A_\bullet) \longrightarrow D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$, adjoint à gauche de j^*.

Dém. La pleine fidélité de $j_!$ découle du reste, puisque $j^* j_!$ sera adjoint à gauche de $j^* j_* = id$, et donc $j^* j_! = id$, ce qui donne la pleine fidélité.

Pour montrer le reste, il suffit de prouver que pour tous $M, N \in D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$,

$$R\underline{Hom}_A(j_! M, N) \overset{ⓐ}{\xrightarrow{\sim}} R\underline{Hom}_A(j_! M, N \overset{L}{\otimes}_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} A_\bullet)$$

$$\overset{(b)}{\simeq} R\underline{\mathrm{Hom}}_A\left(M, N \otimes^L_{(A,I)_0} A_0\right).$$

En effet cela montrera à la fois que $R\mathrm{Hom}_A(j_! M, -)$ ne dépend que de l'image de M dans $D(A_0)$ et l'adjonction.

(b) : Par définition de $j_! M$, le cone de $M \to j_! M$ est un A_∞-module.

(a) le cone de $N \to N \otimes^L_{(A,I)_0} A_0$ est un A_∞-module par le lemme 1, donc il suffit de montrer que

$$j_! M \otimes^L_{(A,I)_0} A_\infty = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} j_! M \otimes^L_{(A,I)_0} A_\infty &= \left(M \otimes_{(A,I)_0} A_\infty/A[-1]\right) \otimes_{(A,I)_0} A_\infty \\ &= M \otimes_{(A,I)_0} \left(A_\infty/A[-1] \otimes_{(A,I)_0} A_\infty\right) \end{aligned}$$

En appliquant $- \otimes_{(A,I)_0} A_\infty$ au triangle distingué

$$A_\infty/A[-1] \to A \to A_\infty,$$

on obtient

$$A_\infty/A[-1] \otimes_{(A,I)_0} A_\infty \to A_\infty \to A_\infty \otimes_{(A,I)_0} A_\infty \simeq A_\infty.$$

Donc $A_\infty/A[-1] \otimes_{(A,I)_0} A_\infty = 0$, comme désiré.

2) Cas général.

Comme ci-dessus, l'existence et la description de j^* découlent de la théorie générale des anneaux analytiques. Pour la définition et les propriétés de $j_!$, notons tout d'abord que l'on peut supposer $A = S$ (les $(A,R)_\blacksquare$-modules solides, resp. $(A,S)_\blacksquare$-modules solides, étant simplement les A-modules dans la catégorie des $(S,R)_\blacksquare$-modules solides, resp. $S_\blacksquare$-modules solides.)

Donc on peut supposer $S \to A$ surjective. Mais alors on peut (en gardant A fixe et en faisant varier S) supposer $S = R[X_1,\dots,X_n]$, puisque $(A,S)_\blacksquare = A_\blacksquare$ ne dépend pas de S pour $S \to A$ surjective.

en effet, $\forall I$, $\prod S \otimes A \simeq \prod A$ car A S-mod de t.f.

Mais alors en utilisant de nouveau que le cas $R \to S \to A$ se ramène au cas $R \to S = S$, on voit que l'on peut supposer $S = A = R[X_1,\dots,X_n]$. Alors la factorisation

$$(A,R)_\blacksquare \to (A, R[X_1,\dots,X_{n-1}])_\blacksquare \to A_\blacksquare$$

ramène par récurrence au cas $n = 1$. Dans ce cas, on peut appliquer les arguments du cas particulier 1), en notant que rien ne change si $\mathbb{Z}$ y est remplacé par R. ∎

<u>Th</u>: Soit $f : R \to A$ morphisme de $\mathbb{Z}$-alg de type fini.

($\Leftrightarrow f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$)

(a) Le foncteur $f_! : D(A_\bullet) \to D(R_\bullet)$ défini comme le composée

$$D(A_\bullet) \xrightarrow{j_!} D((A,R)_\bullet) \xrightarrow{\text{oubli}} D(R_\bullet)$$

commute aux sommes directes et satisfait la "formule de projection"

$$f_!((M \otimes^L_{R_\bullet} A_\bullet) \otimes^L_{A_\bullet} N) \simeq M \otimes^L_{R_\bullet} f_! N,$$

$\forall M \in D(R_\bullet), N \in D(A_\bullet)$.

Si f est de Tor-dimension finie, $f_!$ préserve les objets compacts. La formation de $f_!$ est compatible à la composition.

(b) Le foncteur $f_!$ admet un adjoint à droite

$$f^! : D(R_\bullet) \to D(A_\bullet).$$

L'objet $f^! R \in D(A_\bullet)$ est discret et un complexe borné inférieurement de A-modules de type fini. Si f est de Tor-dimension finie, $f^! R$ est borné et $f^!$ commute aux sommes directes. La formation de $f^!$ est compatible à la composition.

Dém : 1) Cas particulier : $R = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}[T]$.

Lemme : Pour tout ensemble I, l'application naturelle

$$j_!\Big(\prod_I A\Big) \longrightarrow \prod_I (A_\infty/A)[-1]$$

est un isomorphisme.

<u>Dém.</u>: En effet,

$$j_!\Big(\prod_I A\Big) = j_! j^*\Big(\prod_I \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A\Big)$$

$$= \Big(\prod_I \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A\Big) \otimes^L_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} (A_\infty/A)[-1]$$

$$= \Big(\prod_I \mathbb{Z}\Big) \otimes^L_{\mathbb{Z}_\bullet} (A_\infty/A)[-1].$$

$\prod_I \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} \prod_J \mathbb{Z} = \prod_{I\times J} \mathbb{Z}$!

$$= \prod_I A_\infty/A\,[-1]$$

Existence de $f^!$: par définition, $f_!$ commute aux sommes directes (car $j_!$ commute aux sommes directes, étant un adjoint à gauche, et le foncteur oubli aussi de façon évidente). Nous allons faire usage du résultat suivant:

<u>Th</u> (représentabilité de Brown) Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ des catégories triangulées avec $\mathcal{D}$ compactement engendrée. Soit $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ un foncteur commutant aux sommes directes. Alors F admet un adjoint à droite.

En prenant $\mathcal{D} = D(A_\bullet)$, $\mathcal{D}' = D(\mathbb{Z}_\bullet)$, on en déduit l'existence de $f^!$. De plus il est facile de voir que

$j^!$ commute aux sommes directes ssi $j_!$ preserve objets compacts. Les objets compacts de $D(A_\bullet)$ sont engendrés par les $\prod_I A$. Pour ceux-ci, on a par le lemme ci-dessus

$$j_!\left(\prod_I A\right) = \underbrace{\prod_I (A_\infty/A)[-1]}_{\text{objet compact de } D(\mathbb{Z}_\bullet)}$$

Par la formule de projection, on observe que

$$j_!\left((M \otimes^L_{\mathbb{Z}_\bullet} A_\bullet) \otimes^L_{A_\bullet} N\right) \simeq (M \otimes^L_{\mathbb{Z}} A) \otimes^L_{(A,\mathbb{Z})_\bullet} j_! N$$

dans $D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$ car les deux membres sont les mêmes après application de j^* et après tensorisation par A_∞ ils s'annulent tous deux. Cette égalité vaut dans $D((A,\mathbb{Z})_\bullet)$, il suffit ensuite d'appliquer le foncteur oubli vers $D(\mathbb{Z}_\bullet)$.

Enfin, par adjonction on a :

$$f^!\mathbb{Z} = R\mathrm{Hom}_A(A, j^!\mathbb{Z}) \simeq \underbrace{R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{compact}}}{j_! A}, \mathbb{Z})}_{\text{discret}}$$

En fait, $f^!\mathbb{Z} = R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_\infty/A[-1], \mathbb{Z})$
$= \mathbb{Z}[T][1]$.

(2) Compatibilité à la composition.

Il suffit de le faire pour $(-)_!$, cela suivra par adjonction pour $(-)^!$. Supposons donnés $R' \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} A$.

Il s'agit de voir que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D((A,R)_\bullet) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "\text{oubli}"'] & D((A,R')_\bullet) \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ D(R_\bullet) \arrow[r, "j_{2!}"] & D((R,R')_\bullet) \end{tikzcd}$$

$$\left[\begin{array}{l} (f\circ g)_! : D(A_\bullet) \xrightarrow{j_!} D((A,R')_\bullet) \xrightarrow[\text{oubli}]{} D(R'_\bullet) \\ f_!\circ g_! : D(A_\bullet) \xrightarrow{j_{1!}} D((A,R)_\bullet) \xrightarrow{\text{oubli}} D(R_\bullet) \xrightarrow{j_{2!}} D((R,R')_\bullet) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{\text{oubli}} D(R'_\bullet) \end{array}\right]$$

est commutatif. Mais la commutativité de ce diagramme est claire, car on fait la même chose en haut et en bas (on a simplement en plus une structure de A-module sur la ligne du haut).

(3) Cas général : Maintenant que l'on sait que $(-)_!, (-)^!$ sont compatibles à la composition, on peut se ramener au cas $R \to R[X_1,\dots,X_n] = A$ et au cas $R \twoheadrightarrow A$.

Par récurrence, le premier cas se ramène au cas $n=1$, et en remplaçant $\mathbb{Z}$ par R à ce que l'on a fait en (1).

Dans le second cas, $R \twoheadrightarrow A$, notons que $A_\bullet = (A,R)_\bullet$. Donc $j_!$, et aussi $f_!$, est juste le foncteur oubli.

La formule des projections dans ce cas devient triviale.

Si f a Tor-dimension finie, on peut, comme R est noethérien, tirer une résolution finie de A par des R-modules projectifs de rang fini. Donc $\prod_I A$ est aussi compact vu comme objet de $\mathcal{D}(R_\bullet)$.

L'existence de $f^!$ est de nouveau une conséquence de ce que $f_!$ (= oubli) commute aux $\oplus$, de même que la commutation aux $\oplus$ de $f^!$ si f est de Tor-dimension finie. Pour les autres assertions, on se ramène encore à $A = R[X]$, ou $R \twoheadrightarrow A$. Le premier cas a déjà été vu. Pour le second, on a :

$$f^! R = R\underline{\mathrm{Hom}}_R(A, R)$$

iso to a bounded complex of finite proj R-mod si f a Tor-dimension finie. ∎