Exercice 5, TP 8 (Indications)

1) Calcul direct pour les polynômes trigonométriques + Weierstrass trigonométrique

2) Appliquer 1) avec f_k = fonction 2π-périodique continue à valeurs positives, à valeurs strictement positives sur $]b_k-\frac{\varepsilon}{2}, b_k+\frac{\varepsilon}{2}[$ et nulle sur $]b_k-\pi, b_k+\pi[\setminus]b_k-\varepsilon, b_k+\varepsilon[$

3) Si $\sigma \geq 1$,

$$\left|\log \zeta(s) - \sum_p \frac{1}{p^s}\right| = \left|\sum_p \sum_{m\geq 2} \frac{1}{m p^{ms}}\right| \leq \sum_p \underbrace{\sum_{m\geq 2} \frac{1}{p^m}}_{\frac{1}{p(p-1)}} < +\infty$$

4)
$$\operatorname{Re}\left(\sum \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(t \log p_k)}{p_k^\sigma}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(t\log p_k)}{p_k^\sigma} + \sum_{k>n} \frac{1}{p_k^\sigma}.$$

Les $\frac{\log p_k}{2\pi}$, $k=1,\dots,n$, sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
(unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers)

Soit $\varepsilon>0$. D'après 2), il existe $t>n$, m_k, $k=1,\dots,n$ entiers tq :

$$\forall k=1,\dots,n, \quad \left|\frac{t\log(p_k)}{2\pi} - \frac{1}{2} - m_k\right| < \varepsilon$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Alors $\cos(t\log(p_k)) = -\cos(t\log p_k - \pi - 2\pi m_k)$
$\leq -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Donc : $\exists t>n$ tq $\forall \sigma>1$,

$$\operatorname{Re}\left(\sum_p \frac{1}{p^s}\right) \leq -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^\sigma} + \sum_{k>n} \frac{1}{p_k^\sigma} \qquad (s=\sigma+it)$$

5) Soit $H>0$. On choisit σ assez proche de 1 pour que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^\sigma} > H \qquad \left(\text{possible car } \sum \frac{1}{p_k} \text{ diverge}\right)$$

puis on choisit n tq $\sum_{k>n}^{\infty} \frac{1}{p_k^\sigma} < \frac{1}{4}H$ i.e. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^\sigma} > \frac{3}{4}H$.

Pour t comme dans 4) et un tel σ et un tel n,

$$Re\left(\sum_p \frac{1}{p^s}\right) \leq -\frac{3}{8}H + \frac{1}{4}H = -\frac{1}{8}H \xrightarrow[H \to +\infty]{} -\infty$$

Donc $Re\left(\sum_p \frac{1}{p^s}\right)$ prend des valeurs arbitrairement négatives sur $\{s, Re(s)>1, Im(s)>M\}$

Donc aussi $\log \zeta(s)$ d'après 3)

donc $\zeta(s)$ s'approche arbitrairement de zéro.

Rq : Ce résultat explique pourquoi la non annulation de ζ sur la droite $Re(s)=1$ est un énoncé délicat à obtenir....

Feuille supplémentaire :

Exercice 1 :

1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M_\varepsilon > 0$ tq :

$$\forall k \geq 1 \qquad |a_k| \leq M_\varepsilon (1+\varepsilon)^k.$$

et donc $$|S_n(z)| \leq M_\varepsilon (n+1) \max_{0 \leq k \leq n} \left((1+\varepsilon)^k |z|^k\right) \qquad \begin{pmatrix} n \geq 1 \\ z \in \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

De ceci on déduit que si $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et $R > 1$ est tq $K \subseteq \overline{D}(0,R)$, alors :

$$\forall n \geq 1 \ \forall z \in K, \qquad |S_n(z)|^{1/n} \leq M_\varepsilon^{1/n} (n+1)^{1/n} (1+\varepsilon) R.$$

2) La première assertion est évidente. Pour la seconde, soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \geq 0$ tq

$$\forall n \geq N, \qquad |S_n(z)| \leq (1+\varepsilon)^n. \text{ Alors:}$$

$$\forall n \geq N+1, \qquad |a_n z^n| \leq |S_n(z)| + |S_{n-1}(z)| \leq 2(1+\varepsilon)^n$$

De plus $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$. Donc $|z| \leq 1+\varepsilon$. Donc $|z| \leq 1$.

3) Par l'absurde. Soit $a \in S^1$, $r > 0$ et $N \geq 1$ tq S_n ne s'annule pas sur $D(a,r)$ pour $n \geq N$. On peut donc trouver ϕ_n tq $\phi_n^n = S_n$ et ϕ_n holomorphe sur $D(a,r)$.

Soit $b \in D(a,r)$, $|b|>1$. D'après 1) et 2), il existe une suite str. croissante $(n_k)_{k \geq 1}$ tq $(|\phi_{n_k}(b)|)_{k \geq 1}$ tend vers $l > 1$ et de plus (ϕ_n) bornée indép. de n sur $D(a,r)$.

Montel $\Rightarrow$ ϕ_{n_k} a une valeur d'adhérence $\phi \in H(D(a,r))$ tq $|\phi(b)| = l > 1$.

Mais si $z \in D(a,r) \cap D$, Hurwitz implique : $\sum a_n z^n \neq 0$ et d'après 2), $|\phi(z)| = 1$. Donc ϕ est de module constant égal à 1 sur $D(a,r) \cap D$ et donc constante par le théorème de l'image ouverte. Ceci contredit $|\phi(b)| > 1$.

Exercice 2 :

Supposons que $f \circ f$ n'a pas de point fixe. Alors f non plus. Donc

$$z \mapsto \frac{f \circ f(z) - z}{f(z) - z} \in H(\mathbb{C}).$$

Cette fonction ne prend pas la valeur 0. Elle ne prend pas non plus la valeur 1 (sinon $f(z)$ est un point fixe de f). Le petit th. de Picard donne alors $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$ tq

$$f(f(z)) - z = a\big(f(z) - z\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En dérivant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f'(z)\big(f'(f(z)) - a\big) = 1 - a.$$

Comme $a = 1$, f' ne s'annule pas et $f' \circ f$ ne prend pas la valeur a. Donc $f' \circ f$ évite les valeurs 0 et a (qui sont distinctes) et donc en réappliquant le petit th. de Picard : $f' \circ f$ est constante, donc aussi f' (th. de l'image ouverte) et donc il existe α, β tq

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Comme f est sans point fixe, $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$.