

Analyse Complexe  
TD 1  
Equations de Cauchy-Riemann, séries entières

**Exercice 1**

1. Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = x + iy^2$ , pour  $z = x + iy$ . Existe-t-il un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  sur lequel la fonction  $f$  soit holomorphe ?
2. Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(x + iy)$  soit un polynôme en  $x$  et  $y$ . Montrer que  $f$  est holomorphe si et seulement si c'est un polynôme.
3. Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in H(U)$ . On suppose qu'il existe  $a, b, c$  des réels non tous nuls tels que

$$a\operatorname{Re}(f) + b\operatorname{Im}(f) + c = 0.$$

Que peut-on dire de  $f$  ? Interprétation géométrique ?

**Exercice 2** Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$ .

1. Soit  $f \in H(U)$ . Montrer l'équivalence entre :  $f$  est constante ;  $\operatorname{Re}(f)$  est constante ;  $\operatorname{Im}(f)$  est constante ;  $|f|$  est constante.
2. Soit  $f \in H(U)$  telle que  $\bar{f} \in H(U)$  : que peut-on dire de  $f$  ?

**Exercice 3**

1. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann pour  $f$  en coordonnées polaires.
2. En déduire l'existence d'une primitive holomorphe de  $z \mapsto 1/z$  sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ .

**Exercice 4**

1. Soient  $z, w$  deux nombres complexes tels que  $\bar{w}z \neq 1$ . Prouver que si  $|z|, |w| < 1$

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1$$

et qu'on a égalité si  $z$  ou  $w$  est de module 1.

2. On fixe  $w$  avec  $|w| < 1$ . Montrer que la fonction

$$F_w : z \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}$$

réalise une bijection holomorphe du disque unité ouvert sur lui-même échangeant 0 et  $w$ . Montrer que  $|F(z)| = 1$  si et seulement si  $|z| = 1$ .

**Exercice 5** Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction différentiable.

On dit que  $f$  conserve les angles "de manière infinitésimale" si pour tout couple de chemins dérivables  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $[0, 1]$  dans  $U$  tels que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  et dont les dérivées en 0 ne s'annulent pas, l'angle orienté  $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$  est égal à l'angle orienté  $(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$ , avec  $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$ ,  $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ . Montrer que  $f$  préserve les angles "de manière infinitésimale" si et seulement si  $f$  est holomorphe et sa dérivée ne s'annule pas.

Quelles sont les fonctions qui préservent les angles non orientés ?

## Exercice 6

1. Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On note  $E(f)$  l'ensemble des points du cercle unité  $S$  où la série converge. Montrer que les cas suivants peuvent se produire :  $E(f) = S$  ;  $E(f) = \emptyset$  ;  $E(f) = S \setminus \{z_0\}$ , avec  $z_0 \in S$ .

La question suivante traite un cas particulier favorable.

2. (\*) On note  $D = \{z, |z| < 1\}$ . Soit  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et injective. On suppose  $f$  développable en série entière sur  $D$  :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_n a_n z^n.$$

Exprimer l'aire de  $f(\bar{D})$  en fonction des  $a_n$  et en déduire que la série  $\sum n|a_n|^2$  converge. Puis montrer que

$$\forall z \in \bar{D}, \quad f(z) = \sum_n a_n z^n.$$

3. On va fabriquer un exemple de série entière vérifiant  $a_n \rightarrow 0$  et telle que  $E(f) = \emptyset$  (dû à Luzin). Soit  $m > 0$  un entier. On note

$$\Phi_m(z) = 1 + z + \dots + z^{m-1}.$$

Soit  $z_0 \in S$ . Montrer que

$$\max_{0 \leq k \leq m-1} |\Phi_m(z_0 e^{2i\pi k/m})| \geq \frac{2m}{\pi}.$$

4. On pose

$$H_m(z) = \Phi_m(z) + z^m \Phi_m(z e^{-2i\pi/m}) + \dots + z^{(m-1)m} \Phi_m(z e^{-2i\pi(m-1)/m})$$

et

$$f(z) = H_1(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} z^{1^2+2^2+\dots+(m-1)^2} H_m(z).$$

Montrer que  $f(z)$  satisfait aux conditions cherchées.

*On commencera par estimer le module du  $n$ -ème coefficient du développement de  $f$  en série entière.*

5. A l'aide de l'exemple de Luzin, fabriquer une série entière de rayon de convergence 1 telle que  $E(f) = \{1\}$ .

## Exercice 7

1. Déterminer le rayon de convergence de la fonction de Bessel d'ordre  $r$

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

où  $r \in \mathbb{N}^*$ .

2. Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_n \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série hypergéométrique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $-\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ .

## Exercice 8 (\*)

On considère la série entière  $\sum a_n z^n$ , avec, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = p_n/n$ ,  $p_n$  étant le nombre d'entiers  $k \geq 1$  tels que  $k!$  divise  $n$ . Déterminer le rayon de convergence de cette série, puis étudier la convergence de la série lorsque  $x = e^{2i\pi r}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , et lorsque  $x = e^{2i\pi e}$ .

## Exercice 9

1. Soit  $g(z) = \sum b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que  $\operatorname{Re}(g(z)) > 0$  pour tout  $|z| < 1$ . Montrer que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $0 < r < 1$ ,

$$b_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta$$

et en déduire que

$$\forall n \geq 1, |b_n| \leq 2\operatorname{Re}(b_0).$$

2. Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 vérifiant

$$\forall |z| < 1, |f(z)| < 1.$$

Montrer que

$$\forall |z| < 1/3, \sum_n |a_n z^n| < 1.$$

Montrer que la constante  $1/3$  est optimale (on pourra considérer les fonctions introduites dans l'exercice 4).