

# Analyse Complexe

## TD 2

### Formule de Cauchy et premières conséquences

**Exercice 1** Soit  $D = D(0, 1)$ ,  $0 < r < 1$ . Soit  $f \in H(D)$ , bornée par  $M > 0$  sur le cercle  $|z| = r$  et s'annulant en au moins un point  $a \in D(0, r)$ . Montrer que

$$|f(0)| \leq \frac{M|a|}{r - |a|}.$$

#### Exercice 2

1. En intégrant  $z \mapsto e^{-z^2}$  sur le secteur angulaire délimité par les segments  $[0, R]$  et  $[0, Re^{i\pi/4}]$  ( $R > 0$ ), calculer les intégrales

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx.$$

2. Soit  $a$  un réel strictement positif. Calculer

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) \cos(ax) dx$$

en intégrant une fonction bien choisie sur le rectangle de sommets  $\{\pm R, \pm R + ia/2\}$ ,  $R > 0$ .

3. En utilisant le morceau de couronne délimité par deux demi-cercles centrés en 0, calculer

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} - 1}{x} dx$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

4. En utilisant le même contour que dans la question précédente, calculer

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx \quad , \quad J = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

**Exercice 3** (\*) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n > 0$ . On note  $h(z) = z^{2n}P(z + z^{-1})\bar{P}(z + z^{-1})$  ( $\bar{P}$  est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de  $P$ ). On suppose par l'absurde que  $P$  est sans racine. En considérant l'intégrale

$$\frac{1}{i} \int_S \frac{\zeta^{2n-1}}{h(\zeta)} d\zeta,$$

aboutir à une contradiction. Une preuve de plus du "théorème fondamental de l'algèbre" !

**Exercice 4** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\bar{D}(0, 1)$ , holomorphe sur  $D(0, 1)$ . On suppose que les coefficients dans le développement en série entière de  $f$  en 0 sont tous des entiers. Montrer que  $f$  est un polynôme.

#### Exercice 5

1. Soit  $D \geq 0$ . Montrer un analogue du théorème de Liouville pour les fonctions qui sont  $\mathcal{O}(|z|^D)$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ .

2. Soit  $f$  une fonction entière. Montrer que si  $|f| \rightarrow \infty$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ , alors  $f$  est un polynôme.
3. (\*) Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un voisinage de  $\overline{D}(0, r)$ , telle que  $f(0)$  ne soit pas nul. On note  $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ . Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $f$ ) telle que le nombre de zéros de  $f$  dans  $D(0, r/3)$  est inférieur ou égal à  $C \log(M/|f(0)|)$ .  
Considérer  $g(z) = \frac{f(z)}{\prod(1-\frac{z}{z_m})}$  où les  $z_m$  sont les zéros de  $f$  dans  $D(0, r/3)$ .

**Exercice 6** On note  $S$  l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. Un *point singulier* de  $f$  est un élément  $z \in S$  tel que la fonction  $f$  ne s'étende pas en une fonction holomorphe sur un voisinage de  $z$ . On note  $\mathcal{S}(f)$  l'ensemble des points singuliers de  $f$  et  $\mathcal{R}(f) = S \setminus \mathcal{S}(f)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{S}(f)$  est un fermé non vide de  $S$ .
2. Un premier exemple : on suppose que  $a_n \geq 0$  pour tout  $n$ . Montrer que  $1 \in \mathcal{S}(f)$ . Donner un exemple de telle série avec  $\mathcal{S}(f) = \{1\}$ .
3. Un deuxième exemple : montrer que si  $f(z) = \sum a_n z^{n!}$  est une série entière de rayon de convergence 1 avec  $a_n \geq 0$  pour tout  $n$ ,  $\mathcal{S}(f) = S$ .
4. Soit  $\lambda > 0$  entier et  $(p_n)_n, (q_n)_n$  deux suites d'entiers positifs vérifiant

$$\forall n, \lambda q_n > (\lambda + 1)p_n$$

et supposons que  $a_k = 0$  dès qu'il existe  $n$  tel que  $p_n < k < q_n$ . On suppose que  $1 \in \mathcal{R}(f)$ .

- (a) On note  $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z^\lambda + z^{\lambda+1})$ . Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de  $f \circ \varphi$  en l'origine est strictement plus grand que 1.
  - (b) Montrer que la suite des sommes partielles  $(\sum_{k=0}^{p_n} a_k z^k)_n$  converge sur un voisinage de 1.
5. Soit  $c > 1$  un réel, et  $(p_n)_n$  une suite d'entiers vérifiant

$$\forall n, p_{n+1} \geq cp_n.$$

On suppose que  $a_k = 0$  dès qu'il existe  $n$  tel que  $p_n < k < p_{n+1}$ . Montrer que  $\mathcal{S}(f) = S$ .

6. *Exemple.* Montrer que la série

$$f(z) = 1 + 2z + \sum_{k \geq 1} 2^{-k^2} z^{2^k}$$

définit une fonction injective et continue sur le disque unité fermé, holomorphe sur le disque ouvert, infiniment différentiable en tout point de  $S$  mais ne se prolonge holomorphiquement en aucun point de  $S$ .

*Les deux questions précédentes sont intéressantes car elles montrent que contrairement à ce que suggère l'intuition, la lacunarité et la continuité au bord n'excluent pas la présence de singularités.*

7. (Si vous avez fait l'exercice 6 du TD 1) Montrer qu'en général on n'a ni  $E(f) \subset \mathcal{R}(f)$ , ni  $\mathcal{R}(f) \subset E(f)$ .  
Toutefois, un théorème de Fatou affirme que si l'on suppose  $a_n \rightarrow 0$ , alors  $\mathcal{R}(f) \subset E(f)$ . En particulier on voit que pour l'exemple de Luzin de l'exercice 6 du TD 1, tous les points du cercle sont singuliers.

### Exercice 7 (\*)

1. Soit  $U$  un domaine borné de  $\mathbb{C}$ ,  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  continue, holomorphe en restriction à  $U$ . Soit  $a \in U$  tel que  $s := \min_{z \in \partial U} |f(z) - f(a)| > 0$ . Montrer que  $f(U)$  contient  $D(f(a), s)$ .
2. On considère le cas  $U = D(0, r)$  et on suppose que  $f$  est non constante, holomorphe sur un voisinage de  $U$  ( $f$  satisfait donc en particulier aux hypothèses de la question précédente) et vérifie  $\|f'\|_U \leq 2|f'(0)|$ . Montrer que  $D(f(0), R) \subset f(U)$ , avec  $R := (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)|$ .  
On pourra écrire  $f(z) - f(0) - f'(0)z = \int_{[0,z]} (f'(\zeta) - f'(0))d\zeta$  et appliquer la formule de Cauchy à l'intégrande.
3. Soit  $f$  une fonction holomorphe non constante sur un voisinage du disque unité  $D$ . Montrer que la fonction continue  $z \mapsto |f'(z)|(1 - |z|)$  sur  $\overline{D}$  atteint son maximum en un point  $p \in D$  et que  $|f'(z)| \leq 2|f'(p)|$  si  $z \in D(p, (1 - |p|)/2)$ .
4. Sous les hypothèses de la question précédente montrer que

$$D(f(p), (\frac{3}{2} - \sqrt{2})|f'(0)|) \subset f(D).$$

En déduire que l'image d'une fonction entière contient des disques de rayon arbitrairement grand.