Analyse Complexe
TD 7
Zéros des fonctions entières

Exercice 1 Montrer qu'il existe une unique suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de nombres complexes telle que pour tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

On les appelle les nombres de Bernoulli. Montrer qu'ils sont rationnels en donnant une formule permettant de les calculer par récurrence. En développant en série entière autour de 0 la fonction $z \mapsto \pi \cot(\pi z) - 1/z$, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\zeta(2k) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Calculer en particulier $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$.

Exercice 2 Soit D le disque unité ouvert. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $D \setminus \{0\}$ telle que

$$\sum_{n\geq 1} (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Montrer que la formule

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$$

définit une fonction holomorphe bornée sur D, dont on précisera les zéros.

Exercice 3 Cet exercice propose une preuve différente des résultats de l'exercice 3 du TD 4 [1].

1. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite injective de complexes telle que $|z_n| \to +\infty$. Soit également $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients complexes. En développant en série entière $z \mapsto P_n(1/(z - z_n))$ sur $D(0, |z_n|)$, montrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ de polynômes telle que la série de fonctions

$$z \mapsto \sum_n P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z)$$

   converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{z_n,\ n \geq 1\}$.
2. En déduire que si l'on se donne une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus, des entiers $d_n \geq 1$ et des complexes $a_{n,0}, \ldots, a_{n,d_n}$ pour chaque $n \geq 1$, alors il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq d_n$,

$$h^{(k)}(z_n) = a_{n,k}.$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'ayant pas de zéro commun. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.

1. La question 6 de cet exercice faisait admettre l'existence d'un *plus grand diviseur commun* dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ à toute famille d'éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Pouvez-vous maintenant démontrer ce fait ?

4. Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) = h\mathcal{O}(\mathbb{C})$$
où
$$f_1\mathcal{O}(\mathbb{C}) + \ldots + f_n\mathcal{O}(\mathbb{C}) := \{u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n \mid u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}\,.$$
On dit que $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est un *anneau de Bézout*.
5. Donner un exemple de famille $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que
$$\{u_1 f_1 + \ldots + u_r f_r \mid r \geq 1,\ \forall k\ u_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\}$$
ne soit pas de la forme $h\mathcal{O}(\mathbb{C})$, avec $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Exercice 4 Soit (a_n) une suite de nombres complexes avec $|a_n| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une fonction entière $\sum b_k z^k$ s'annulant exactement en les a_n, avec $b_k \in \mathbf{Q}(i)$ pour tout k. Montrer que si les a_n sont réels, on peut même choisir les b_k dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 5 Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer le petit théorème de Picard (cf. TD 5) pour les fonctions entières d'ordre fini.
2. Quels sont les polynômes P tels que l'équation $\exp(z) - P(z) = 0$ ait une infinité de zéros ?

Exercice 6 Soit f une fonction entière non constante dont tous les zéros sont réels, telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, et dont l'ordre est strictement inférieur à 2. En considérant $\mathrm{Im}(f'/f)$, montrer que tous les zéros de f' sont réels.