Cours 10

Transformation de Fourier ℓ-adique

Références :

- Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, § 1, IHES.
- Kiehl-Weissauer, Weil conjectures, Perverse Sheaves and ℓ-adic Fourier transform, § VI, Springer.

Pour $\sigma : Gal_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ continue irréductible partout non ramifiée, la fonction

$$f_\sigma \in C^\infty_{cusp}\left(Mir_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_x GL_n(\mathcal{O}_x), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

propre pour Hecke, dont on aimerait montrer qu'elle est invariante par l'action à gauche de $GL_n(F)$, était construite à partir de la fonction de Whittaker W_σ par une suite de transformées de Fourier.

Nous savons grâce au cours 9 que le faisceau pervers $\mathcal{L}_{\mathbb{L}} \in Perv(Coh_{X,0})$ (où comme toujours $\mathbb{L}$ désigne le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local sur X associé à σ) géométrise, au moins partiellement, W_σ.

Il nous reste donc à géométriser la construction qui permet de passer de W_σ à f_σ, et donc en particulier la transformée de Fourier. Nous n'avons eu besoin de cette dernière que pour le groupe additif (et ses puissances) et c'est donc ce cas qui nous intéressera.

Rappelons le dans ce cadre :

$k = \mathbb{F}_q$ corps fini. Soit $\psi : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ caractère additif ($\leftrightarrow$ racine p-ème de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$) non trivial.

On notera encore
$$\psi : k \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$
$$x \mapsto \psi(\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(x))$$
caractère additif non trivial de k.

Si V est un k-espace vectoriel de dimension finie, le dual linéaire $V^\vee$ de V s'identifie à son dual de Pontryagin via $\check{v} \mapsto (v \mapsto \psi(\langle \check{v}, v\rangle))$.

Si f est une fonction de V dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f}$ sur $V^\vee$
$$\check{v} \mapsto \sum_{v \in V} f(v)\, \psi(\langle \check{v}, v\rangle).$$

Avec tout ce que nous avons déjà fait, géométriser cette construction n'est pas difficile :

Soit S un schéma (ou un champ algébrique) sur k.
Soit $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel géométrique (cf. cours 5) sur S de rang constant d et $\mathcal{V}^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} S$ son dual.

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V} \arrow[dl, "pr^\vee"'] \arrow[dr, "pr"] \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{V}}"] & \mathbb{A}^1_S \\
\mathcal{V}^\vee & & \mathcal{V}
\end{tikzcd}$$

$pr, pr^\vee$ projections, $\alpha_{\mathcal{V}}$: accouplement de dualité

<u>Déf</u> : La <u>transformation de Fourier ℓ-adique</u> pour $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} S$ (associée à ψ) est le foncteur

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee} : D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^b_c(\check{\mathcal{V}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

$$A \longmapsto R pr^\vee_! (pr^* A \otimes \alpha_{\mathcal{V}}^* \mathcal{L}_\psi)[d],$$

avec $\mathcal{L}_\psi$ le <u>faisceau d'Artin-Schreier</u> : le morphisme $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$, $x \mapsto x^q - x$ (cas particulier de l'isogénie de Lang du cours 2) fait de $\mathbb{A}^1_k$ un revêtement étale galoisien de lui-même de groupe $\mathbb{A}^1_k(k) = k$, et on note $\mathcal{L}_\psi$ le système local associé à ψ.

<u>Exo</u> : Vérifier que pour $S = \mathrm{Spec}(k)$, $\mathcal{V}$ donné par le k-ev de dim finie V, $\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}$ géométrise (au sens du dictionnaire faisceaux-fonctions) la transformée

de Fourier ci-dessus, au signe près. (Utiliser le calcul de la trace de $\mathcal{L}_\psi$ fait au cours 5.)

La transformée de Fourier ℓ-adique a des propriétés formelles tout à fait semblables à son analogue fonctionnel.

Si comme ci-dessus $\mathcal{V}$ est un fibré vectoriel géométrique sur S, on notera $a : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\vee\vee}$ l'opposé de l'isomorphisme canonique $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}^{\vee\vee}$.

<u>Th 1</u>: On dispose pour tout $A \in D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ d'un isomorphisme fonctoriel

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}^{\vee\vee}} \circ \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}(A) \simeq a_* A(-d).$$

<u>Dém</u>: On va expliciter le grand diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{V} \times_S \mathcal{V}^{\vee\vee} \arrow[rrr, "\gamma"] \arrow[ddd, bend right, "pr'"'] \arrow[dddrr, "pr^{\vee\vee\prime}"] \arrow[drrr, phantom, "\square"] & & & \mathcal{V}^{\vee\vee} \\
 & & & \mathcal{V} \times_S \mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V}^{\vee\vee} \arrow[u, "p_{13}"] \arrow[rrr, "t"] \arrow[dl, "p_{12}"'] \arrow[dr, "p_{23}"] \arrow[dd, phantom, "\square"] & & & \mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V}^{\vee\vee} \arrow[u, "pr^{\vee\vee}"'] \\
 & & \mathcal{V} \times_S \mathcal{V}^\vee \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dr, "pr^\vee"] & & \mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V}^{\vee\vee} \arrow[dl, "pr^\vee"'] \arrow[dr, "pr^{\vee\vee}"] & & \\
 & \mathcal{V} & & \mathcal{V}^\vee & & \mathcal{V}^{\vee\vee} &
\end{tikzcd}$$

avec $f : (v, v^\vee, v^{\vee\vee}) \mapsto (v^\vee, v^{\vee\vee} - a(v))$

$g : (v, v^{\vee\vee}) \mapsto v^{\vee\vee} - a(v)$

On a : $\quad pr_{12}^* \alpha_v^* \mathcal{L}_\psi \otimes pr_{2,3}^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi = f^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi .$

(cf. cours 2 !)

Pour calculer $\mathcal{F}_{\psi, v^\vee \to v^{\vee\vee}} \circ \mathcal{F}_{\psi, v \to v^\vee}(A)$, on peut appliquer le théorème de changement de base propre au carré cartésien du bas. On obtient :

$$\mathcal{F}_{\psi, v^\vee \to v^{\vee\vee}} \circ \mathcal{F}_{\psi, v \to v^\vee}(A)[-d] = R pr^{\vee\vee}_! \left(\alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes R p_{23,!}\, p_{12}^* (\alpha_v^* \mathcal{L}_\psi \otimes pr^* A) \right)$$

$$\simeq R(pr^{\vee\vee} \circ p_{23})_! \left(p_{12}^* \alpha_v^* \mathcal{L}_\psi \otimes p_{23}^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes (pr \circ p_{12})^* (A) \right)$$

(formule de projection)

$$\simeq R(pr^{\vee\vee} \circ p_{23})_! \left(f^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes (pr \circ p_{12})^* (A) \right)$$

Or $pr^{\vee\vee} \circ p_{23} = pr^{\vee\vee\prime} \circ p_{13}$ et $pr \circ p_{12} = pr' \circ p_{13}$. Donc

$$\simeq R pr^{\vee\vee\prime}_! \circ R p_{13!} \left(f^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes p_{13}^* \circ pr'^* (A) \right)$$

$$\simeq R pr^{\vee\vee\prime}_! \left(R p_{13!} f^* \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes pr'^* A \right)$$

(formule de projection)

$$\simeq R pr^{\vee\vee\prime}_! \left(g^* R pr_! \alpha_{v^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \otimes pr'^* A \right)$$

(chgt de base propre)

Supposons que l'on démontre que
$$R\mathrm{pr}^{\vee\vee}_! \alpha_{V^\vee}^* \mathcal{L}_\psi \simeq \sigma^{\vee\vee}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d)[-d].$$
avec $\sigma^{\vee\vee} : S \to V^{\vee\vee}$ la section nulle.

Alors comme $g^* \sigma^{\vee}_{**} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq (id, a)_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$
(de nouveau, changement de base propre), on obtient
$$\mathcal{F}_{\psi, V^\vee \to V^{\vee\vee}} \circ \mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}(A)(d) \simeq R\mathrm{pr}^{\vee\vee'}_! \Big((id, a)_* \circ \underbrace{(id, a)^* \circ \mathrm{pr}'^* A}_{id^*} \Big)$$
$$\simeq \underbrace{R\mathrm{pr}^{\vee\vee'}_! \circ (id, a)_*}_{a_*} (A))$$
$$= a_*(A),$$
comme voulu. ∎

Il reste à démontrer le fait admis dans la démonstration ci-dessus. C'est un cas particulier de l'énoncé suivant (prendre $V = V^\vee$, $A = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$) :

<u>Prop 1</u> : Si $V \to S$ est un fibré vectoriel de rang d, et $A \in D^b_c(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme fonctoriel :
$$\mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}(\pi^* A[d]) \simeq \sigma^\vee_* A(-r)$$
$\sigma^\vee : S \to V^\vee$ section nulle

Dém : Avant de commencer la preuve, notons que :

- $\mathcal{L}_{\psi}|_{\{0\}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$
- (ψ non trivial) $R\Gamma_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, \mathcal{L}_\psi) = 0$.

En effet, si $f : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ est le revêtement d'Artin-Schreier, on a :

$$R\Gamma_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq R\Gamma_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\chi} R\Gamma_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, \mathcal{L}_\chi).$$

la somme portant sur tous les caractères additifs de k. En comparant les deux membres, on en déduit que $R\Gamma_c(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, \mathcal{L}_\psi) = 0$ si $\chi \neq 1$.

On applique d'abord la formule de projection :

$$\mathcal{F}_\psi(\pi^* A[d]) \simeq A \otimes R\mathrm{pr}^\vee_! \alpha_V^* \mathcal{L}_\psi [2d]$$

Par le théorème de changement de base propre, et les deux faits rappelés ci-dessus, on a :

$$\sigma^{\vee *} R\mathrm{pr}^\vee_! \alpha_V^* \mathcal{L}_\psi \simeq R\pi_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

et $$j^{\vee *}(R\mathrm{pr}^\vee_! \alpha_V^* \mathcal{L}_\psi) = 0$$

si $j^\vee : V^\vee - \sigma_V(S) \hookrightarrow V^\vee$ est l'immersion ouverte du complémentaire de la section nulle.

Donc le triangle $j^\vee_! j^{\vee *} \to id \to \sigma^\vee_* \sigma^{\vee *}$ nous donne

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}(\pi^* A[d]) \simeq A \otimes \sigma^\vee_* R\pi_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}[2d]$$

$$\simeq A(-d)$$

puisque $R\pi_! \overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}(-d)[-2d]$ (cette assertion est locale sur S et $\mathcal{V}$ est un fibré vectoriel, donc on se ramène au calcul de la cohomologie à support compact de l'espace affine). ∎

<u>Cor</u> 1: Le foncteur $\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee} : D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to D^b_c(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est une équivalence, de quasi-inverse $a^* \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}^{\vee\vee}}(-d)$.

<u>Prop</u> 2 : Soit $S' \to S$ un morphisme, $\mathcal{V}$ un fibré de rang constant sur S, $\mathcal{V}'$ son tiré en arrière à S'. On a alors pour $A \in D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}(Rf_{\mathcal{V},!} A) \simeq Rf_{\mathcal{V}^\vee,!}(\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}' \to \mathcal{V}'^\vee}(A))$$

avec $f_\mathcal{V} : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$, $f_{\mathcal{V}^\vee} : \mathcal{V}'^\vee \to \mathcal{V}^\vee$.

Dém: Application directe du théorème de changement de base propre.

Prop 3: Soit $f : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ un morphisme de fibrés vectoriels sur S, de dual $f^\vee : \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}'^\vee$. On suppose les rangs de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ constants, égaux à d et d'. Alors on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}(Rf_! A) \simeq f^{\vee *} \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}' \to \mathcal{V}'^\vee}(A)[d'-d]$$

pour tout $A \in D^b_c(\mathcal{V}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Dém: On observe que :

$$(f \times id)^* \alpha_{\mathcal{V}}^* \mathcal{L}_\psi \simeq (id \times f^\vee)^* \alpha_{\mathcal{V}'}^* \mathcal{L}_\psi$$

et on applique changement de base et formule de projection au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{V}' \times \mathcal{V}'^\vee \arrow[dl, "id \times f^\vee"'] \arrow[dr, "f \times id"] \arrow[dd, phantom, "\square"] & & \\
 & \mathcal{V}' \times \mathcal{V}^\vee \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "f \times id"] \arrow[dd, phantom, "\square"] & & \mathcal{V} \times \mathcal{V}'^\vee \arrow[dl, "id \times f^\vee"'] \arrow[dr, "pr_2'^\vee"] \arrow[dd, phantom, "\square"] & \\
\mathcal{V}' \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{V} \times \mathcal{V}^\vee \arrow[dl, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2^\vee"'] & & \mathcal{V}'^\vee \\
 & \mathcal{V} & & \mathcal{V}^\vee \arrow[ur, "f^\vee"'] &
\end{tikzcd}$$

Exo: compléter les détails. ∎

Cor 2 : Soit $W \xrightarrow{i} V$ sous-fibré vectoriel de rang e. Notons $W^\perp \xrightarrow{i^\perp} V^\vee$ l'orthogonal de W. Alors on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}\left(i_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}[e] \right) \simeq i^\perp_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}(-e)[d-e].$$

Dém : Appliquer successivement les propositions 1 et 3. ∎

Une propriété plus étonnante de la transformée de Fourier est la suivante :

Th 2 : Il existe un isomorphisme canonique entre les foncteurs

$$A \mapsto \mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}\left(\mathbb{D}_V(A)\right) \quad \text{et} \quad A \mapsto \mathbb{D}_{V^\vee}\left(\mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}(A)\right)(-r)$$

de $D^b_c(V, \overline{\mathbb{Q}_\ell})^{opp}$ dans $D^b_c(V^\vee, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

En termes plus imagés : "la transformée de Fourier commute à la dualité."

Rq : Cette propriété est un peu inattendue car la dualité de Verdier échange image directe et image directe exceptionnelle ; or $\pi^\vee$, le long de laquelle on prend le passé en avant exceptionnel, n'est pas du tout propre (affine, c'est un fibré !).

Dém : Considérons le foncteur g_ψ :

$$\mathbb{D}_{\mathcal{V}^\vee} \circ \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee} \circ \mathbb{D}_{\mathcal{V}} : D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^b_c(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

On a pour tout A,

$$g_\psi(A) \simeq Rpr^\vee_* \left(pr^! A \,\tilde{\otimes}\, \mathbb{D}_{\mathcal{V}^\vee \times \mathcal{V}}(\alpha_{\mathcal{V}}^* \mathcal{L}_\psi) \right)[-d].$$

où l'on a noté $-\tilde{\otimes}-$ le bifoncteur

$$(K, K') \mapsto \mathbb{D}\left(\mathbb{D}(K) \otimes \mathbb{D}(K')\right).$$

Vérifions que g_ψ est un adjoint à droite de $a^* \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}^{\vee\vee}}$. On a, pour tous $A \in D^b_c(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, $B \in D^b_c(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,

$$\mathrm{Hom}_{D^b_c(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(B, g_\psi(A)) \overset{(1)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{D^b_c(\mathcal{V}^\vee \times \mathcal{V})}\left(pr^{\vee *} B, pr^! A \,\tilde{\otimes}\, \mathbb{D}(\alpha_{\mathcal{V}}^* \mathcal{L}_\psi)\right)[-d]$$

$$\overset{(2)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{D^b_c(V^\vee \times V)}\left(\mathrm{pr}^{\vee *}B, R\underline{\mathrm{Hom}}(\alpha_V^* \mathcal{L}_\psi, \mathrm{pr}^! A)\right)[-d]$$

$$\overset{(3)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{D^b_c(V^\vee \times V)}\left(\mathrm{pr}^{\vee *}B \otimes \alpha_V^* \mathcal{L}_\psi, \mathrm{pr}^! A\right)[-d]$$

$$\overset{(4)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{D^b_c(V, \overline{\mathbb{Q}_\ell})}\Big(\underbrace{R\mathrm{pr}_!(\mathrm{pr}^{\vee *}B \otimes \alpha_V^* \mathcal{L}_\psi)[d]}_{\simeq a^* \mathcal{F}_\psi(B)}, A\Big)$$

où l'on a utilisé successivement :

(1) : l'adjonction $(\mathrm{pr}^{\vee *}, R\mathrm{pr}^\vee_*)$ et la formule

$$\mathbb{D}_{\mathbb{A}^1}(\mathcal{L}_\psi) = \mathcal{L}_{\psi^{-1}}(1)[2]$$

(2) l'isomorphisme canonique $R\underline{\mathrm{Hom}}(K, K') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(K) \tilde{\otimes} K'$.

(3) l'adjonction tenseur-$\underline{\mathrm{Hom}}$.

(4) l'adjonction $(\mathrm{pr}_!, \mathrm{pr}^!)$.

Donc $\mathcal{G}_\psi$ est un adjoint à droite de $a^* \mathcal{F}_{\psi, V^\vee \to V^{\vee\vee}}$. Mais $\mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}(d)$ aussi, puisque par le corollaire ci-dessus, c'est un quasi-inverse de $a^* \mathcal{F}_{\psi, V^\vee \to V^{\vee\vee}}$. Par unicité de l'adjoint à droite, on a un isomorphisme

$$\mathcal{G}_\psi \simeq \mathcal{F}_{\psi, V \to V^\vee}(d),$$

d'où le théorème. ∎

Cor 3 Le foncteur $\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}$ transforme faisceaux pervers sur $\mathcal{V}$ en faisceaux pervers sur $\mathcal{V}^\vee$ et induit une équivalence de catégories abéliennes

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee} : \mathrm{Perv}(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Perv}(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

de quasi-inverse $a^* \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}^{\vee\vee}}(d)$.

Rq : Cet énoncé justifie le décalage $[d]$ utilisé dans la définition de $\mathcal{F}_\psi$.

Dém : Il suffit de vérifier la première assertion. Le théorème précédent montre en outre qu'il suffit de vérifier que $\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}$ est t-exact à gauche, i.e. que :
$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee}({}^p D_c^{b, \geq 0}(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \subseteq {}^p D_c^{b, \geq 0}(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Or : pr est lisse de dim d, donc $pr^*[d]$ est t-exact à gauche (même t-exact) et $pr^\vee$ est affine donc (Artin-Grothendieck, cf. cours 7), $pr^\vee_!$ est t-exact à gauche. D'où la conclusion. ■

La transformée de Fourier ℓ-adique a été introduite par Deligne et utilisée par lui, Laumon et Katz pour l'étude de différentes questions arithmétiques. On verra au cours 11 quel rôle elle joue dans le programme de Langlands géométrique. Donnons-en ici une première application indépendante, en lien avec le cours 8.

Retour sur la théorie de Springer :

On reprend les notations du cours 8. À l'aide du théorème de décomposition et de la résolution de Grothendieck-Springer $\tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\tilde{p}} \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(GL_n)$), nous avons montré que

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathfrak{g})}(\underbrace{R\tilde{p}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell [n^2]}_{=\,\tilde{\mathcal{S}}}) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell [S_n].$$

Puis nous avons admis que le morphisme induit

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell [S_n] \to \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(N)}(\mathcal{S})$$

était un isomorphisme.

Or, on a une immersion fermée

$$\tilde{N} \xrightarrow{\tilde{i}} \mathfrak{g} \times \mathcal{F}\ell.$$ (au-dessus de $i : N \to \mathfrak{g}$)

Voyons $\mathfrak{g} \times \mathcal{F}l$ comme un fibré $\mathcal{V}'$ (trivial) de rang n^2 sur $\mathcal{F}l$. Son dual $\mathcal{V}'^\vee$ est $\mathfrak{g}^* \times \mathcal{F}l$.

Le morphisme $\tilde{i}$ fait de $\tilde{N}$ un sous-fibré de $\mathcal{V}'$; son orthogonal est

$$\tilde{i}^\perp : \mathfrak{n}^\perp \times^B G \longrightarrow \mathcal{V}'^\vee .$$

En appliquant le corollaire 2 ci-dessus, on obtient :

$$(*) \quad \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}'^\vee \to \mathcal{V}'}\left(\tilde{i}^\perp_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \mathfrak{n}^\perp \times^B G}[n^2]\right) \simeq \tilde{i}_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \tilde{N}}[n(n-1)]$$

Considérons maintenant le morphisme $S' = \mathcal{F}l \xrightarrow{f} S = \mathrm{Spec}(k)$ et appliquons la proposition 2, avec $\mathcal{V} = \mathfrak{g}$.

$$(*) \quad Rf_{\mathcal{V}',!}\left(\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}'^\vee \to \mathcal{V}'}\left(\tilde{i}^\perp_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \mathfrak{n}^\perp \times^B G}[n^2]\right)\right)$$

$$\simeq \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}}\left(\underbrace{Rf_{\mathcal{V}^\vee,!}\, \tilde{i}^\perp_*}\, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \mathfrak{n}^\perp \times^B G}[n^2]\right)$$

$= \bar{q} : \mathfrak{n}^\perp \times^B G \longrightarrow \mathfrak{g}^*$

$=$ résolution de Grothendieck-Springer pour $\mathfrak{gl}_n^*$!

D'où finalement :

$$i_* \mathcal{S} \underset{\text{car } i \circ p = f_{\mathcal{V}} \circ \tilde{i}}{\simeq} Rf_{\mathcal{V},!}\, \tilde{i}_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell, \tilde{N}}[n^2] \underset{(*) + (*)}{\simeq} \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}}\left(\bar{\mathcal{S}}^*\right)$$

En particulier, comme $\mathcal{F}_{\varphi, \mathcal{V}^\vee \to \mathcal{V}}$ est une équivalence entre catégories abéliennes de faisceaux pervers,

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathcal{N})}(\mathcal{S}) = \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathfrak{g})}(i_* \mathcal{S})$$

$$\simeq \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathfrak{g}^*)}(\overline{\mathcal{S}}^*) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[S_n]$$

par ce qui a été vu au Cours 8.