Cours 11

Construction de Drinfeld-Laumon ; descente

Références :

- Laumon, Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, Duke Math. Journal.
- Laumon, Travaux de Frenkel-Gaitsgory-Vilonen sur la correspondance de Drinfeld-Langlands, Sém. Bourbaki.
- Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen, Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture, JAMS.
- Frenkel-Gaitsgory-Vilonen, On the geometric Langlands conjecture, JAMS.

Pour $\sigma : \mathrm{Gal}_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ continue non ramifiée partout, nous avons posé $f_\sigma := \Phi(W_\sigma)$. L'isomorphisme est construit comme une suite de transformées de Fourier. Laumon dans son article explique comment les réinterpréter géométriquement. Nous allons ici donner directement la réponse.

Pour $i \geq 0$, notons Coh_i le champ des faisceaux cohérents plats de rang générique i (rappelons que $\mathcal{F}$ faisceau cohérent S-plat sur X_S, le rang générique de $\mathcal{F}$ est une fonction localement constante).

Supposons, pour simplifier les notations, que $g = \mathrm{genre}(X) \geq 2$. Pour tout $0 \leq i \leq n$ ($n = \dim(\sigma) = \mathrm{rg}(\mathbb{L})$), notons :

$$\mathcal{C}_i \subseteq \mathrm{Coh}_i$$

l'ouvert formé des $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_i$ tels que

- $\deg(\mathcal{F}) \geq i(i-1)(g-1) + \underbrace{n(2g-2)+1}_{=:\, m}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \Omega^{1\ \otimes(2n-1)}_{X/k}) = 0$.

Le rôle de la première condition sera expliqué plus tard. Pour la seconde, notons qu'elle implique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \Omega^{1\,\otimes j}_{X/k}) = 0 \quad \forall j \leq 2n-1.$$

(car comme $g \geq 2$, $H^0(X, \Omega_{X/k}) \neq 0$).

Par dualité de Serre, on en déduit

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega^{1\,\otimes j}_{X/k}, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall j \leq 2n-2.$$

Rq : L'ouvert $\mathcal{C}_i$ est non vide : tout fibré semi-stable de rang i et de degré assez grand lui appartient.

Si S est un k-schéma et $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_i(S)$, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\Omega^{1\,\otimes(i-1)}_{X/k}, \mathcal{F}) : T/S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_T}}(f_T^* \Omega^{1\,\otimes i-1}_{X/k}, \mathcal{F}_T)$

est un fibré vectoriel géométrique sur S de rang

$$\deg(\mathcal{F}) - i(2g-2) - g + 1 = \deg(\mathcal{F}) - 2i(g-1).$$

Ceci valant pour tout S, fonctoriellement en S, on a ainsi défini un fibré vectoriel

$$\mathcal{V}_i \to \mathcal{C}_i.$$

Notons $\mathcal{V}_i^\vee \to \mathcal{C}_i$ le fibré dual. Par dualité de Serre, on a que $\mathcal{V}_i^\vee$ est l'espace de modules des faisceaux $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_i$ avec une extension

$$0 \to \Omega^{1\,\otimes i}_{X/k} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0$$

(correspondant à un élément de $\mathrm{Ext}^1_0(\mathcal{F}, \Omega^{1\,\otimes i}_{X/k})$).

Pour $i = 0, \ldots, n$, notons en outre

$$\mathcal{V}_i^{\circ} \overset{j_i}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_i$$

l'ouvert formé des morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules $\Omega^{1\,\otimes(i-1)}_X \to \mathcal{F}$ qui sont injectives et

$$\mathcal{V}_i^{\vee,\circ} \overset{j_i^\vee}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_i^\vee$$

(noter que $j_i^\vee$ est juste une notation)

l'ouvert formé des extensions $(0 \to \Omega^{1\,\otimes i}_{X/k} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0)$ telles que $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}_{i+1}$ (la première condition est automatique, cela revient donc à dire que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega^{1\,\otimes 2n-1}_{X/k}) = 0 \quad).$$

Notons que le morphisme

$$\mathcal{V}_i^{\vee\circ} \xrightarrow{r_i} \mathcal{V}_{i+1}^{\circ},$$

$$(0 \to \Omega^{1\,\otimes i}_{X/k} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0) \mapsto (\Omega^{1\,\otimes i}_{X/k} \to \mathcal{F}')$$

est bien défini et est un isomorphisme de champs algébriques sur k (vérification facile).

Les fibrés $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_1^\vee$ sur $\mathcal{C}_i$ ne sont pas de rang constant, car la fonction degré sur $\mathcal{C}_i$ ne l'est pas. Pour remédier à ce problème, nous allons fixer un entier $d \geq m$ et nous restreindre à la composante $\mathcal{C}_i^{d_i}$ de degré $d_i = d + \sum_0^{i-1} j(2g-2) = d + i(i-1)(g-1)$.

On définit, pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$\mathcal{F}^d_{\psi,i} : D^b_c(\mathcal{V}_i^{d_i,\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^b_c(\mathcal{V}_{i+1}^{d_{i+1},\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

$$A \mapsto \gamma^{d_i}_{i,*} j_i^{d_i,\vee,*} \mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}_i^{d_i} \to \mathcal{V}_i^{d_i,\vee}}(j^{d_i}_{i,!} A))$$

Notons $f_d : \mathcal{V}_1^{d_1,\circ} \to \mathrm{Coh}_0^d$, $(\mathcal{O} \xrightarrow{s} \mathcal{F}) \mapsto \mathrm{coker}(s)$

Posons alors, par récurrence :

- $K^d_{\mathbb{L},1} = f_d^*(\mathcal{L}_{\mathbb{L}|\mathrm{Coh}_0^d})[d]$.
- $K^d_{\mathbb{L},i+1} = \mathcal{F}^d_{\psi,i}(K_{\mathbb{L},i})$, $i = 1, \dots, n-1$.

Pour $1 \leq i \leq n$, on note $K_{\mathbb{L},i} \in D^b_c(\mathcal{V}_i^\circ, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ le complexe qui est $K^d_{\mathbb{L},i}$ en restriction à la composante connexe $\mathcal{V}_i^{d_i,\circ}$, pour chaque $d \geq m$.

Enfin notons $\mathrm{Bun}'_n \subseteq \mathcal{V}_n^\circ$ l'ouvert formé des $(\Omega^{1\ \otimes(n-1)}_{X/k} \to \mathcal{F})$ tels que $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel (de rang n) et posons :

$$\mathrm{Aut}'_{\mathbb{L}} := K_{\mathbb{L},n}|_{\mathrm{Bun}'_n}.$$

Notons que nous n'avons pour le moment pas utilisé l'hypothèse que $\mathbb{L}$ est géom. irréductible. L'énoncé suivant l'utilise crucialement.

<u>Th</u> (Gaitsgory) : Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, les applications canoniques $j_{i,!}(K_{\mathbb{L},i}) \to j_{i,*}(K_{\mathbb{L},i})$ sont des isomorphismes.

Ce théorème est difficile. Avant d'en discuter un cas particulier, nous allons en déduire une conséquence importante.

Th 1 : La restriction de $K_{\mathbb{L},i}$ à chaque composante connexe de $\mathcal{V}_i^\circ$ est un faisceau pervers irréductible. $(i=1,\dots,n)$

Dém : La démonstration se fait par récurrence sur i. Soit $d \geq m$.

Cas $i=1$: Nous ferons usage du résultat suivant :

Prop : Soit $f : Y' \to Y$ morphisme de champs algébriques sur k, avec Y lisse et f lisse à fibres géom. connexes. Supposons en outre que f est surjectif de dim relative d ou que f est l'inclusion d'un ouvert dense. Alors $f^*[d]$ ($d=0$ dans le second cas) est t-exact et envoie faisceaux pervers irréductibles sur faisceaux pervers irréductibles.

Dém (esquisse) La t-exactitude a déjà été vue. On vérifie en revenant à la définition de l'extension intermédiaire et en utilisant le changement de base que :

$f^*[d](IC(Z,\mathcal{L})) = IC(f^{-1}Z, f_{|f^{-1}Z}^* \mathcal{L})$. Il s'agit donc de voir dans les deux cas que $f_{|f^{-1}Z}^* \mathcal{L}$ est irréductible si $\mathcal{L}$ l'est pour obtenir la dernière assertion. Supposons que Y, Y' sont des k.schémas (le cas général s'y ramène par un argument de descente). Dans cette situation, on sait que dans les deux cas, le morphisme $\pi_1(f^{-1}Z) \to \pi_1(Z)$ est surjectif. ■

Le morphisme $f_d : \mathcal{E}_1^{d,1,0} \to Coh_0^d$ est lisse surjectif de dim relative d, à fibres géom. connexes (les fibres sont des $\underline{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O})$, $\mathcal{F} \in Coh_0^d$).

Donc (cf. prop.), il suffit de montrer que $\mathcal{L}_{\mathbb{L}|Coh_0^d}$ est pervers irréductible. Nous savons déjà qu'il est pervers (conso g). Irréductibilité : le faisceau $\mathcal{L}_{\mathbb{L}|Coh_0^d}$ est l'extension intermédiaire de sa restric. lim à l'ouvert formé des faisceaux de torsion de degré d dont le support est formé de d points disjoints. Sur cet ouvert, il s'obtient comme descente du système local $\mathbb{L}^{\boxtimes d}$ | (complémentaire des diagonales dans X^d) ← ouvert dense dans X^d lisse

⇒ restriction encore irréductible.

<u>Cas $i \geq 1$</u> : Soit $i \geq 1$; supposons le résultat connu pour i et montrons-le pour $i+1$.

Par le théorème de Gabber, on a

$$j_{i,!}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d} \simeq j_{i,*}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d}.$$

donc en particulier ($K_{\mathbb{L},i}^{d}$ étant pervers)

$$j_{i,!}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d} \simeq j_{i,!*}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d} \simeq j_{i,*}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d}.$$

Par conséquent, $j_{i,!}^{d_i} K_{\mathbb{L},i}^{d}$ est pervers irréductible, puisque $K_{\mathbb{L},i}^{d}$ l'est.

La transformation de Fourier préserve perversité et irréductibilité (cf. cours 10). Ainsi,

$$\mathcal{F}_{\psi, \mathcal{V}_i^{d_i} \to \mathcal{V}_i^{d_i,\vee}} \left(j_{i,!}^{d_i} K_{\mathbb{L},i} \right)$$

est aussi pervers irréductible.

Finalement, $j_i^{d_i,\vee}$ est une immersion ouverte d'un ouvert dense, donc par la proposition ci-dessus $j_i^{d_i \vee *}$ préserve perversité et irréductibilité.

On en déduit que $K_{\mathbb{L},i+1}^{d}$ est pervers irréductible. ∎

Avant d'aller plus loin, discutons du théorème dans le cas particulier $n=2$.

L'argument (quelque soit n) procède par récurrence sur la longueur de la torsion dans $\mathcal{E}_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Nous n'allons discuter que du cas où il n'y a pas de torsion. Dans le cas $n=2$, seul $i=1$ intervient. Il s'agit alors de montrer que :

$$(*) \quad j_! K_{\mathbb{L}} \simeq j_* K_{\mathbb{L}}$$

avec $j : \mathrm{Div}^{\geq m} = \bigsqcup_{d \geq m} \mathrm{Div}^d \hookrightarrow \mathrm{Bun}_1'^{,\geq m} = \bigsqcup_{d \geq m} \mathrm{Bun}_1'^{,d}$

et $K_{\mathbb{L}} = K_{\mathbb{L},1} \,|\, \mathrm{Div}^{\geq m}$. (Note : ici, $m = 4g-3$)

Notons que $\mathrm{Bun}_1'^{,\geq m}$ est un fibré vectoriel sur $\mathrm{Bun}_1^{\geq m} \simeq \mathrm{Pic}^{\geq m}$, dont le complémentaire de la section nulle $i : \mathrm{Bun}_1^{\geq m} \hookrightarrow \mathrm{Bun}_1'^{,\geq m}$ est précisément j.

Notons $\pi : \mathrm{Bun}_1'^{,\geq m} \to \mathrm{Bun}_1^{\geq m}$ le morphisme structural.

Lemme : L'assertion $(*)$ est équivalente à dire que $\underbrace{(\pi \circ j)_!}_{= AJ^{\geq m}} (K_{\mathbb{L}}) = 0$.

Dém : En effet, $(*)$ équivaut à demander que $i^! j_! K_{\mathbb{L}} = 0$ (pour le voir, appliquer le triangle de foncteurs $i_* i^! \to id \to j_* j^*$ à $j_! K_{\mathbb{L}}$).

Le complexe $j_! K_{\mathbb{L}}$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant, pour l'action naturelle par homothéties de $\mathbb{G}_m$ sur le fibré $\pi : \mathrm{Bun}_1'^{\geq m} \to \mathrm{Bun}_1^{\geq m}$. On conclut en notant que pour tout complexe A $\mathbb{G}_m$-équivariant sur un fibré vectoriel, $i^! A \simeq \pi_! A$ (i étant la section nulle et π le morphisme vers la base). ▪

Grâce au lemme, nous sommes donc réduit à montrer que $AJ_!^{\geq m}(K_{\mathbb{L}}) = 0$, i.e. que pour tout $d \geq 4g-3$, $AJ_!^d (K_{\mathbb{L},1} |_{\mathrm{Div}^d}) = 0$. Par construction, $K_{\mathbb{L},1} |_{\mathrm{Div}^d} = \mathbb{L}^{(d)}$. Il faut donc prouver que

$\forall d \geq 4g-3, \quad AJ^d_!\left(\mathbb{L}^{(d)}\right) = 0.$

Supposons que ce ne soit pas le cas pour un $d \geq 4g-3$. Soit j le plus petit entier tel que $R^j AJ^d_!\left(\mathbb{L}^{(d)}\right) \neq 0$. Admettons que c'est un système local sur Pic^d. Comme $\pi_1(\mathrm{Pic}^d_X)$ est abélien, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local $\mathcal{M}$ de rang 1 sur Pic^d_X t.q. $H^0\left(\mathrm{Pic}^d_X, \mathcal{M} \otimes R^j AJ^d_!\left(\mathbb{L}^{(d)}\right)\right) \neq 0$ et donc (par la suite spectrale de Leray et minimalité de j),

$$H^j\Big(X^{(d)}, \underbrace{\mathbb{L}^{(d)} \otimes (AJ^d)^* \mathcal{M}}_{= \mathbb{L}'^{(d)}}\Big) \neq 0.$$

avec $\mathbb{L}' = \mathbb{L} \otimes$ (pullback de $\mathcal{M}$ le long de $X \to \mathrm{Pic}^d_X$)

On peut aussi calculer $H^j(X^{(d)}, \mathbb{L}'^{(d)})$ avec Künneth. Comme $\mathbb{L}'$ est irréductible, $H^0(X, \mathbb{L}') = H^2(X, \mathbb{L}') = 0$.

Donc $$H^j\left(X^{(d)}, \mathbb{L}'^{(d)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq d \\ \Lambda^d H^1(X, \mathbb{L}'), & j = d \end{cases}$$

Mais $\dim H^1(X, \mathbb{L}') = \dim(\mathbb{L}')(2g-2) = 4g-4$ et $d > 4g-4$, donc $\Lambda^d H^1(X, \mathbb{L}') = 0$. Contradiction. ■

<u>Rq</u> : 1) La preuve ci-dessus explique pourquoi la première condition a été imposée dans la définition de $\mathcal{C}_i$: elle intervient pour garantir le théorème de Gaitsgory.

2) Bien sûr, si $rg(\mathbb{L}) = 1$, comme par le corps de classes géométrique $\mathbb{L} = AJ^{1*} Aut_{\mathbb{L}}$, $\mathbb{L}^{(d)} = AJ^{d*} Aut_{\mathbb{L}}$, et donc $AJ^d_! \mathbb{L}^{(d)} = Aut_{\mathbb{L}} \otimes \underbrace{AJ^d_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ = cohomologie de l'espace projectif.

Nous n'en dirons pas plus concernant le théorème d'annulation de Gaitsgory.

Nous allons maintenant décrire la trace de Frobenius de $K_{\mathbb{L},n}$. Pour cela, nous en donnons une description alternative.

Notons $\mathcal{H}_n$ le foncteur qui à un k-schéma S associe le groupoïde des quadruplets

$$\left(\mathcal{F}, (\mathcal{E}_i)_{i=0,\dots,n}, \alpha, (s_i)_{i=0,\dots}\right)$$

avec $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}_n(S)$, $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$ un drapeau complet de fibrés, $\alpha : \mathcal{E}_n \hookrightarrow \mathcal{F}$ à quotient S-plat, et $\forall i = 1, \dots, n$, $s_i : f_S^* {\Omega^1_{X/k}}^{\otimes (n-i)} \simeq \mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$. C'est un champ algébrique. On a un morphisme représentable

$$\nu : \mathcal{H}_n \to \mathcal{V}_n$$
$$(\mathcal{F}, (\mathcal{E}_i), \alpha, (s_i)) \mapsto (\mathcal{F}, \alpha \circ s_1),$$

ainsi qu'un morphisme

$$\rho : \mathcal{H}_n \to \mathrm{Coh}_0$$
$$(\mathcal{F}, (\mathcal{E}_i), \alpha, (s_i)) \mapsto \mathrm{coker}(s).$$

Finalement, notons qu'on a aussi un morphisme

$$\delta : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{A}^1,$$

obtenu comme suit. Pour chaque $0 < i < n$, la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1} \to \mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_{i-1} \to \mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i \to 0$$

définit via les trivialisations s_i, s_{i+1}, une classe dans $\underline{\mathrm{Ext}}^1({\Omega^1}^{\otimes n-i-1}, {\Omega^1}^{\otimes n-i}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}, \Omega) \simeq \mathbb{A}^1$, et la somme de ces classes est l'image du point donné de $\mathcal{H}_n$ par δ.

Posons :

$$K^{\text{ét}}_{\mathbb{L},n} = \nu_! \left(\rho^* \mathcal{L}_{\mathbb{L}} \otimes \delta^* \mathcal{L}_\psi \right) [*]$$

où $[*]$ est un décalage que l'on ne spécifiera pas pour simplifier les notations et qui dépend de la composante connexe ; il est choisi de sorte que $K^{\text{ét}}_{\mathbb{L},n}$ soit pervers. (Il y a aussi une torsion à la Tate que l'on a négligée.) C'est un complexe sur Coh_n.

<u>Prop</u> : Le complexe $K_{\mathbb{L},n}$ coïncide avec la restriction de $K^{\text{ét}}_{\mathbb{L},n}$ à $\mathcal{C}_n$.

<u>Dém</u> : Chasse au diagramme, changement de base propre et formule de projection... ■

<u>Exo</u> : Regarder $n=2,3$ pour s'en convaincre.

Rq : Il faut penser à la proposition comme à un analogue de la formule

$$\sum_{\gamma_{n-1}\in \mathrm{Mir}_{n-1}(F)\backslash GL_{n-1}(F)} \cdots \sum_{\gamma_1\in F^\times} W\left(d[\gamma_1]\cdots d[\gamma_{n-1}]\cdot g\right) = \sum_{\gamma\in N_{n-1}(F)\backslash GL_{n-1}(F)} W\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot g\right)$$

pour toute fonction de Whittaker W, aperçue dans le cours 4. (Ce sera un peu plus clair plus loin.)

La proposition permet de démontrer le théorème suivant :

<u>Th 2</u> (Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen) : la fonction trace de Frobenius $\mathrm{tr}_{\mathrm{Aut}'_{\mathbb{L}}}$ de $\mathrm{Aut}'_{\mathbb{L}}$ coïncide avec la restriction de f_σ.

(expliqué plus bas)

Pour justifier cette affirmation notons les identifications suivantes :

- $\mathrm{Bun}'_n(k) \simeq \mathrm{Mir}_n(F) \backslash P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F)^+ / \prod_v P_{(n-1,1)}(\mathcal{O}_v)$

avec $P_{(n-1,1)} = \begin{pmatrix} GL_{n-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subseteq GL_n$ et

$$P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F)^+ = \prod_v{}' \underbrace{P_{(n-1,1)}(F_v)^+}_{= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ |c| \leq 1 \right\}}.$$

- Notons $\mathcal{H}^{lib}_n \subseteq \mathcal{H}_n$ le sous-champ où $\mathcal{F} \in \mathrm{Bun}_n(S)$. Alors :

$$\mathcal{H}^{lib}_n(k) \simeq N_n(F) \backslash N_n(\mathbb{A}_F) \times_{\prod_v N_n(\mathcal{O}_v)} \left(GL_n(\mathbb{A}_F)^+ / \prod_v GL_n(\mathcal{O}_v) \right)$$

avec pour tout v,

$$GL_n(F_v)^+ = GL_n(F_v) \cap M_n(\mathcal{O}_v), \text{ et}$$

où l'action de $n \in \prod_v N_n(\mathcal{O}_v)$ est donnée par

$$n.(u,g) = (u n^{-1}, n g).$$

- Le morphisme $\nu_{|\mathcal{H}^{lib}_n}(k) : \mathcal{H}^{lib}_n(k) \to \mathrm{Bun}'_n(k)$ est donné par la composée de

$$N_n(F)\backslash N_n(\mathbb{A}_F) \times_{\prod_v N_n(\mathcal{O}_v)} Gl_n(\mathbb{A}_F)^+/\prod_v Gl_n(\mathcal{O}_v) \to N_n(F)\backslash P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F)^+/\prod_v P_{(n-1,1)}(\mathcal{O}_v)$$

$$(u, g) \longmapsto ug$$

et de la flèche naturelle

$$N_n(F)\backslash P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F)^+/\prod_v P_{(n-1,1)}(\mathcal{O}_v) \to Mir_n(F)\backslash P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F)^+/\prod_v P_{(n-1,1)}(\mathcal{O}_v)$$

- Soit $Coh_{0,\leq n} \subseteq Coh_0$ le sous-champ fermé des faisceaux de torsion ayant au plus multiplicité n en chaque point fermé de X. Alors

$$Coh_{0,\leq n}(k) \simeq \prod_v Gl_n(\mathcal{O}_v)\backslash Gl_n(\mathbb{A}_F)^+/\prod_v Gl_n(\mathcal{O}_v).$$

- L'application $p(k)$ envoie (u,g) comme ci-dessus sur l'image de g dans le double quotient décrivant $Coh_{0,\leq n}(k)$.

- L'application $\delta(k)$ est la composée :

$$N_n(F)\backslash N_n(\mathbb{A}_F)/\prod_v N_n(\mathcal{O}_v) \xrightarrow[\text{la sur diagonale}]{\text{termes sur}} k^{n-1} \xrightarrow[\text{somme}]{} k.$$

Rq : 1) Ces identifications sont un peu longues à écrire soigneusement, mais pas difficiles. Cf. Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen ([FGKV]), § 2.4, § 4.1

2) Pour faire fonctionner les identifications ci-dessus on a un peu triché et trivialisé les différentielles pour simplifier les écritures. Cf. de nouveau l'article [FGKV] pour des énoncés plus précis.

3) Comme $P_{(n-1,1)}(\mathbb{A}_F) / \prod_v P_{(n-1,1)}(\mathcal{O}_v) \simeq GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_v GL_n(\mathcal{O}_v)$

on peut voir $Bun'_n(k)$ comme un sous-ensemble de $Mir_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_v GL_n(\mathcal{O}_v)$, où est définie f_σ, ce qui donne un sens au mot "restriction" dans l'énoncé du théorème.

4) On aimerait bien dans les formules ci-dessus se débarrasser des $(-)^+$. Cela reviendrait à se définir certaines données des problèmes de modules que génériquement sur X, mais forcerait à quitter le monde des champs algébriques...

De ces identifications, de la proposition précédente et des définitions de $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}$, W_σ et f_σ', on peut déduire le théorème. Une difficulté vient toutefois du fait que $\mathrm{tr}_{\mathcal{L}_{\mathbb{L}}}$ n'est pas W_σ ; de façon reliée, $\nu_{|\mathcal{H}_n^{lib}(k)}$ n'est pas Φ. Cf [FGKV] pour la solution de ce problème (reflet de l'équivalence de Casselman-Shalika géométrique).

<u>Conclusion</u>: On dispose d'un faisceau pervers
(Th 1 + 2)
$$K_{\mathbb{L},n} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{V}_n^\circ, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$
irréductible en restriction à chaque composante connexe dont la restriction à Bun_n géométrise la fonction f_σ'.

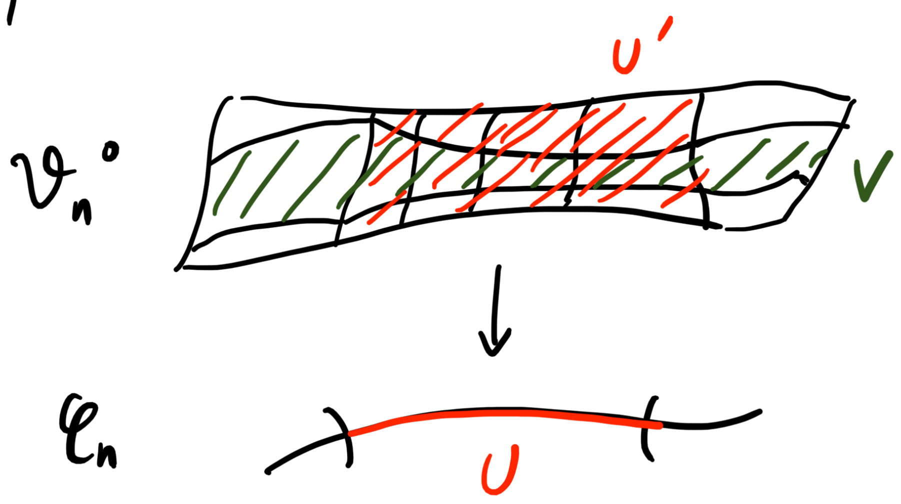
<u>Th 3</u> : (Drinfeld $n=2$, Frenkel-Gaitsgory-Vilonen n quelconque)

Il existe un unique faisceau pervers $K_{\mathbb{L},n}^\circ$ sur $\mathcal{C}_n$ dont le tiré en arrière à $\mathcal{V}_n^\circ$ (convenablement décalé sur chaque composante) soit $K_{\mathbb{L},n}$. La restriction $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}$ de $K^0_{\mathbb{L},n}$ à $\mathcal{E}_n \cap \mathrm{Bun}_n$ s'étend de façon unique en un faisceau pervers encore noté $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}$ sur Bun_n, cuspidal et de Hecke pour $\mathbb{L}$. En particulier, la conjecture de Langlands non ramifiée pour GL_n sur F est vraie.

La preuve du théorème est difficile et nous nous contenterons de quelques brèves remarques.

1) L'essentiel du travail consiste en la démonstration de la première assertion. L'unicité suit du fait que les fibres de $\mathcal{V}_n^0 \to \mathcal{E}_n$ sont lisses et connexes. L'existence est la partie difficile (et celle qui nous intéresse). Elle utilise de façon cruciale le fait que sur chaque composante, $K_{\mathbb{L},n}$ est pervers irréductible. En effet, sur une telle composante, $K_{\mathbb{L},n}$ est nécessairement l'extension

intermédiaire d'un système local sur un ouvert V. Soit $U \subseteq \mathcal{C}_n$ lisse tel que son image inverse U' dans $\mathcal{V}_n^\circ$ vérifie que $U' \cap V$ est dense dans V et se surjecte sur U. Supposons que les caractéristiques d'Euler des tiges de $K_{\mathbb{L},n}$ soient constantes le long des fibres de $U' \to U$. Alors, comme elles le sont aussi sur V (car $K_{\mathbb{L},n}$ y est un système local), elles le sont sur U'.



On en déduit que $K_{\mathbb{L},n|U'}$, qui est pervers irréductible, doit être un système local (U' lisse, caractéristiques d'Euler-Poincaré constantes). Or $U' \to U$ est un fibré vectoriel géométrique épointé sur U et $K_{\mathbb{L},n|U'}$ est un système local qui est $\mathbb{G}_m$-équivariant (suit de sa construction). Comme l'espace projectif est simplement connexe, $K_{\mathbb{L}_n|U'}$ descend en un système local sur U, dont l'extension intermédiaire à $\mathcal{C}_n$ descend $K_{\mathbb{L},n}$.

On le voit, le point clé de l'argument ci-dessus est la constance des caractéristiques d'Euler de $K_{\mathbb{L}_n}$ le long des fibres de $\mathcal{V}_n^\circ \to \mathcal{C}_n$. Celle-ci se démontre par un argument astucieux de changement de système local.

2) Deuxième assertion : la cuspidalité peut se déduire de la propriété de Hecke et de l'irréductibilité de L. Pour démontrer la propriété de Hecke, il faut la reformuler pour qu'elle ait aussi un sens pour des complexes sur les champs apparaissant dans la construction de $K_{\mathbb{L}_n}$ et alors on peut la prouver en suivant ce qu'elle devient à chaque étape et le fait que $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}$ est fabriqué à partir des $\mathbb{L}^{(d)}$ sur $X^{(d)}$ (cf. la preuve

de la multiplicativité de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}$ dans le cas $n=1$).

3) La dernière assertion du théorème se prouve en prenant la trace de Frobenius.