Cours 2

Corps de classes géométrique (version non ramifiée)

Références :

- Milne, "Jacobian varieties", Ch. VII in Cornell-Silverman, Arithmetic Geometry.
- Kleiman, The Picard scheme, ICTP Advanced School in Basic Alg. Geometry.
- Laumon, "Faisceaux automorphes liés aux séries d'Eisenstein", §2, in Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions.

Si Y est un schéma, on note

$\mathrm{Pic}(Y)$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur Y.

Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas. Considérons le foncteur

$$\mathrm{Pic}^{\text{naïf}}_{X/S} : \{S\text{-schémas}\} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$T \longmapsto \mathrm{Pic}(X_T := X \times_S T).$$

Ce foncteur ne définit pas un faisceau sur la catégorie des S-schémas munie de la topologie de Zariski.

Ex: Soit T un S-schéma avec $\mathcal{L}$ fibré en droites sur T tel que $f_T^* \mathcal{L}$ est non-trivial ($f_T : X_T \to T$).

(e.g.: $S = \mathrm{Spec}\, k$, $T = \mathbb{P}^1_S$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Quitte à étendre les scalaires, $X \to S$ a une section s. Après pullback le long de cette section, $f_T^* \mathcal{L}$ est $\mathcal{O}(1)$, qui est non trivial, donc $f_T^* \mathcal{L}$ est non trivial.)

Mais on peut trouver un recouvrement Zariski $T' \to T$ tq $\mathcal{L}_{|T'}$ est trivial. Donc $f_T^* \mathcal{L}_{|X_{T'}}$ est trivial.

Donc on a fabriqué un élément non nul de $\mathrm{Pic}_X^{\text{naïf}}(T)$ qui devient nul dans $\mathrm{Pic}_{X/S}^{\text{naïf}}(T)$.

On peut essayer de résoudre ce problème de deux façons :

- en considérant plutôt le foncteur
$$\mathrm{Pic}_{X/S} : T \longmapsto \mathrm{Pic}(X_T) / \mathrm{Pic}(T)$$
(foncteur donné par le pullback)

- en considérant les faisceautisés $\begin{cases} \mathrm{Pic}_{X/S}^{\text{Zar}} \\ \mathrm{Pic}_{X/S}^{\text{ét}} \end{cases}$ de $\mathrm{Pic}_{X/S}^{\text{naïf}}$

Rappelons que pour tout schéma Y,
$$\mathrm{Pic}(Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*).$$
Le faisceau associé au préfaisceau $T' \mapsto H^1(X_{T'}, \mathcal{O}_{X_{T'}}^*)$ pour T' un T-schéma (T S-schéma) est $R^1 f_{T*} \mathcal{O}_{X_T}^*$. Donc $\mathrm{Pic}_{X/S}^{\text{Zar}}(T) = H^0(T, R^1 f_{T*} \mathcal{O}_{X_T}^*)$.

La suite spectrale de Leray
$$E_2^{p,q} = H^p(T, R^q f_{T,*} \mathcal{O}_{X_T}^*) \Rightarrow H^{p+q}(X_T, \mathcal{O}_{X_T}^*)$$
donne une suite exacte à cinq termes
$$0 \to H^1(T, f_{T,*} \mathcal{O}_{X_T}^*) \to H^1(X_T, \mathcal{O}_{X_T}^*) \to H^0(T, R^1 f_{T*} \mathcal{O}_{X_T}^*)$$
$$\to H^2(T, f_{T*} \mathcal{O}_{X_T}^*) \to H^2(X_T, \mathcal{O}_{X_T}^*). \quad (*)$$

Supposons que $\mathcal{O}_S \simeq f_* \mathcal{O}_{X_T}$ universellement (i.e. après tout changement de base en S). Alors:

$$H^1(T, \mathcal{O}_T^*) \simeq H^1(T, f_{T,*} \mathcal{O}_{X_T}^*).$$

Donc le début de $(*)$ devient:

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X_T) \to \mathrm{Pic}^{Zar}_{X/S}(T).$$

Supposons de plus que f a une section g. Alors g donne un inverse à gauche de

$$H^p(T, f_{T,*} \mathcal{O}_{X_T}^*) \to H^p(X_T, \mathcal{O}_{X_T}^*).$$

Donc cette dernière flèche est injective et donc, prenant $p=2$, on en déduit que l'on a une suite exacte courte:

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X_T) \to \mathrm{Pic}^{Zar}_{X/S}(T) \to 0.$$

Même argument fonctionne pour $\mathrm{Pic}^{ét}_{X/S}$ puisque $H^1(Y_{ét}, \mathcal{O}_{Y_{ét}}^*) = \mathrm{Pic}(Y)$.
(Grothendieck)

Ainsi.

Prop: Soit $f: X \to S$ t.q. $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement et f a une section. On a un isomorphisme de foncteurs:

$$\mathrm{Pic}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}^{Zar}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}^{ét}_{X/S}.$$

En particulier, $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un faisceau.

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas
$S = \mathrm{Spec}(k)$, $k = \mathbb{F}_q$ corps fini de car. p
X courbe projective lisse géom. connexe $/k$.
Dans ce cas, on a bien $f_* \mathcal{O}_X = k$ universellement et l'existence d'une section revient à dire que $X(k) \neq \emptyset$.

<u>Th</u>: le foncteur $\mathrm{Pic}^{\text{ét},0}_{X/k}$ est représentable par une variété abélienne $J(X)$ sur k, appelée la <u>jacobienne</u> de X. Autrement dit (cf. prop. précédente), il existe une variété abélienne $J(X)$ sur k et un morphisme de foncteurs

$$\mathrm{Pic}^0_{X/k} \to J(X)$$

t.q. $\mathrm{Pic}^0_{X/k}(T) \to J(X)(T)$ est un isomorphisme pour tout k-schéma T t.q. $X(T) \neq \emptyset$.

Dans la suite, nous allons esquisser la preuve. Pour cela, on va considérer des objets étroitement reliés aux fibrés inversibles, mais dont il est plus facile de contrôler l'espace de modules, les diviseurs.

Diviseurs de Cartier:

Soit Y un schéma.

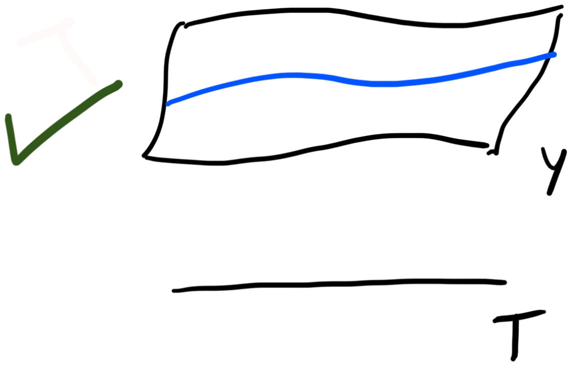
Déf : Un diviseur de Cartier D sur Y est *effectif* s'il est représenté par une famille (U_i, g_i), $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$. Soit $\mathcal{J}(D)$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_Y$ t.q. $\mathcal{J}(D)_{|U_i}$ est engendré par g_i. On a $\mathcal{J}(D) = \mathcal{O}_Y(-D)$ et une suite exacte courte :

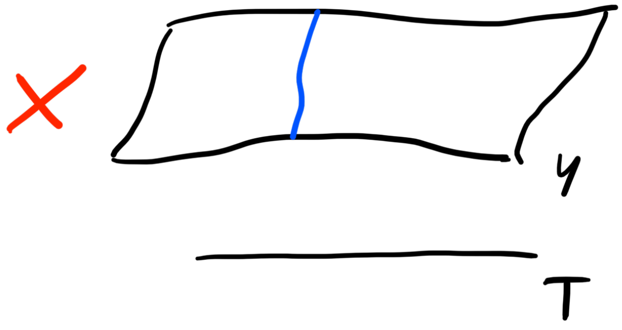
$$0 \to \mathcal{J}(D) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_D \to 0$$

faisceau str. du sous-schéma fermé donné par D.

Rq : sous-schémas fermés de Y donnés par un diviseur de Cartier effectif $\leftrightarrow$ sous-schémas fermés dont le faisceau d'idéaux peut être local^t engendré par un unique élément, non-diviseur de zéro.

Déf : Soit $f : Y \to T$ un morphisme de k-schémas. Un diviseur de Cartier *effectif relatif* sur Y/T est un diviseur de Cartier effectif sur Y qui est plat sur T (quand on le voit comme sous-schéma fermé de Y).





Concrètement, si T affine, $T = \mathrm{Spec}(R)$, D sous-schéma fermé de Y est un diviseur de Cartier effectif relatif ssi $\exists$ recouvrement affine $Y = \bigcup U_i$ et $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) = R_i$ t.q : $D \cap U_i = \mathrm{Spec}(R_i/g_iR_i)$, g_i n'est pas un diviseur de zéro et R_i/g_iR_i plat sur R, $\forall i$.

<u>Exo</u> : si D, D' diviseurs de Cartier effectifs relatifs sur Y/T, $D + D'$ aussi.

<u>Lm</u> : Soit D diviseur de Cartier effectif relatif sur Y/T. L'inclusion $\mathcal{J}(D) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y$ tensorisée par $\mathcal{O}_Y(D)$ donne une inclusion $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y(D)$, donc une section globale s_D de $\mathcal{O}(D)$. (Avec les notations ci-dessus, s_D localement donnée par $R_i \hookrightarrow g_i^{-1}R_i$.)

L'application $D \longmapsto (\mathcal{O}(D), s_D)$ est une bijection entre diviseurs de Cartier effectifs relatifs sur Y/T et classes d'iso de paires

$(\mathcal{L}, s)$ $\mathcal{L}$ fibré en droites sur Y, $s \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$ t.q $0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{s} \mathcal{L} \to \mathcal{L}/s\mathcal{O}_Y \to 0$ exacte

et $\mathcal{L}/s\mathcal{O}_Y$ plat sur T.
($\Leftarrow$ $\forall t \in T$, s pas diviseur de zéro dans $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{Y_t}$ si $Y \to T$ plat).

<u>Prop</u> : Soit $T' \to T$ morphisme, $Y' = Y \times_T T'$.
Si D diviseur de Cartier eff. rel. sur Y/T, alors son tiré en arrière à Y' est un div de Cartier eff. rel. sur Y'/T!

<u>Dém</u> : OPS T, T' affine, $T = \operatorname{Spec} R$, $T' = \operatorname{Spec} R'$.
On choisit un recouvrement ouvert affine U_i de Y, des g_i comme avant. On a bien $D' \cap U_i' = \operatorname{Spec}(R_i'/g_i R_i')$.
De plus les deux autres conditions sont que :

$$0 \to R_i \xrightarrow{g_i} R_i \to R_i/g_iR_i \to 0$$

exact et R_i/g_iR_i plat sur R. Si on tensorise par R' au-dessus de R, on obtient une suite exacte

$$0 \to R_i' \xrightarrow{g_i} R_i' \to R_i'/g_iR_i' \to 0$$

(par platitude) et R_i'/g_iR_i' plat sur R' (par changement de base). ∎

Ainsi, la condition de platitude est importante pour avoir une notion fonctorielle en T (par pullback).

Prop : Soit D un sous-schéma fermé de Y tels que D et Y sont plats sur T. Si D_t est un diviseur effectif de Y_t pour tout $t \in T$, D est un diviseur de Cartier effectif relatif.

Dém : La platitude de $\mathcal{O}_D$ sur T implique que $\forall t \in T$, la suite $0 \to \mathcal{I}(D) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to \mathcal{O}_{Y_t} \to \mathcal{O}_{D_t} \to 0$ est exacte. Donc $\mathcal{I}(D) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) = \mathcal{I}(D_t)$.

Par l'hypothèse, D_t est un diviseur de Cartier, donc $\mathcal{I}(D_t)$ est un $\mathcal{O}_{Y_t}$-module inversible. Critère de platitude fibre à fibre : Y plat sur T + $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_Y$-mod plat sur T t.q. $\mathcal{F}_t$ plat sur $\mathcal{O}_{Y_t}$ $\forall t$, $\mathcal{F}$ plat sur Y. Donc $\mathcal{I}(D)$ plat sur Y et donc comme il est cohérent, $\mathcal{I}(D)$ localt libre sur Y. Comme de nouveau $\mathcal{I}(D) \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) = \mathcal{I}(D_t)$, il est de rang 1.

Conclusion : il est localement engendré par un élément et cet élément n'est pas un diviseur de zéro. ∎

$\Rightarrow$ Pour une courbe relative, diviseur de Cartier effectif relatif = sous-schéma fermé fini et plat sur T.

Soit X courbe projective lisse $/k$ comme avant.
Si T est un k-schéma, on note pour $r \geq 1$,

$$\mathrm{Div}_X^r(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{diviseurs de Cartier effectifs} \\ \text{relatifs } D \text{ sur } X_T/T \text{ t.q.} \\ \forall t \in T,\ \deg D_t = r \end{array} \right\}$$

Par la proposition,
Div_X^r définit un foncteur sur les k-schémas. On va voir maintenant qu'il est représentable. Pour cela, nous avons besoin d'une construction qui jouera un rôle important dans la suite, celle des puissances symétriques de la courbe X.

Commençons par un énoncé général.

<u>Prop</u> : Soit Y une variété sur k, G un groupe fini d'automorphismes de Y. Supposons que pour tout $x \in Y$, son orbite par G soit contenue dans un ouvert affine de Y. Alors $\exists (Z, \pi)$ avec Z variété et $\pi : Y \to Z$ morphisme, t.q. :

(i) Comme espace topologique, (Z, π) est le quotient de Y par l'action de G.

(iii) le morphisme naturel $\mathcal{O}_Z \to (\pi_* \mathcal{O}_Y)^G$ est un isomorphisme.

La paire (Z, π) est déterminée à isomorphisme près par ces conditions. De plus, elle a la propriété universelle suivante : tout morphisme G-inv $Y \to T$, T k-schéma, se factorise de façon unique par π.

Dém (idée) : Unicité : (i) et (iii) déterminent l'espace top. et le faisceau structural.

Existence : (i) et (iii) prescrivent ce que doit être Z.

Réduction au cas affine : par l'hypothèse on peut recouvrir Y par des ouverts affines G-stables U. Si on connaît le cas affine, $(\pi(U), (\pi_* \mathcal{O}_Y)^G_{|\pi(U)})$ variété affine et $\pi(U)$ ouvert de Z, donc Z recouvert par les $\pi(U)$.

On peut donc supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Alors on vérifie que $Z = \mathrm{Spec}(A^G)$ a bien les propriétés voulues. ■

Ex : $Y = \mathbb{A}^n_k$, $G = S_n$. Alors

$$Y/G \simeq \mathbb{A}^n_k,$$ isomorphisme donné par

$$k[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} k[T_1, \dots, T_n]^{S_n}$$
$$X_i \longmapsto \sigma_i(T_1, \dots, T_n).$$

Rq : le morphisme π est fini surjectif, mais étale seule-

…ement lorsque l'action de G est libre.

Rq: La condition de la proposition est toujours satisfaite pour Y quasi-projective.
(si Y localt fermé dans $\mathbb{P}^n$, choisir une hypersurface S de $\mathbb{P}^n$ contenant $\bar{Y} \setminus Y$ mais pas $G.x$ ($x \in Y$ fixé)
Alors $Y - (Y \cap S) = \bar{Y} - (\bar{Y} \cap S)$ est affine ouvert de Y contenant $G.x$).

Nous allons appliquer cela à $Y = X^r := \underbrace{X \times \dots \times X}_{r\text{-fois}}$ (produits sur k)
et $G = S_r$ agissant par permutation.
On notera $X^{(r)}$ la variété quotient.

Rq: La variété $X^{(r)}$ est encore lisse. En effet la lissité est une propriété locale pour la top. étale et $Y \mapsto Y^{(r)}$ envoie morphismes étales sur morphismes étales. Donc on peut se ramener à $X = \mathbb{A}^1$ et donc à l'exemple ci-dessus.
(le fait que l'action a des points fixes crée de la ramification, mais pas nécessairement des singularités!)

On dispose pour tout $r \geq 1$ d'un morphisme de foncteurs

$$X^r \longrightarrow \mathrm{Div}^r_X$$

$$(s_1, \dots, s_r) : T \to X^r \longmapsto \sum_{i=1}^r s_i'(T)$$

$s_i' : T \to X_T$ induit par s_i

(**Note** : Ici, on utilise implicitement que si $s : T \to X_T$ section de f_T, $s(T)$ définit un diviseur de Cartier effectif relatif de X/T (car fini plat).)

Comme elle est visiblement S_r-invariante, elle passe au quotient en une application :

$$X^{(r)} \longrightarrow \mathrm{Div}^r_X .$$

Prop : Le morphisme de faisceaux

$$X^{(r)} \to \mathrm{Div}^r_X$$

est un isomorphisme. Autrement dit, la variété $X^{(r)}$ représente Div^r_X.

Dém : omise.

Construction de la jacobienne $J(X)$:

On veut montrer que le foncteur $\mathrm{Pic}^{\acute{e}t,0}_{X/k}$ est représentable par une variété abélienne $J(X)$. Réductions préliminaires :

- On peut supposer que $X(k) \neq \emptyset$ (argument de descente galoisienne). Alors, par la proposition, on a $\mathrm{Pic}^{\acute{e}t,0}_{X/k}(T) = \mathrm{Pic}^0(X_T)/\mathrm{Pic}(T)$ pour tout k-schéma T. On peut même supposer k séparablement clos.
- Pour $r \geq 0$, notons

$$\mathrm{Pic}^r_{X/k} : T \mapsto \mathrm{Pic}^r(X_T)/\sim$$

où $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$ si il existe $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(T)$ t.q

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}' \otimes f_T^* \mathcal{M}.$$

Soit $P \in X(k)$, p_T la projection $X_T \to X$. Alors

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes p_T^* \mathcal{O}(r.P)$$

induit pour tout $r \geq 0$ un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}^0_{X/k}(T) \simeq \mathrm{Pic}^r_{X/k}(T).$$

Donc il suffit de prouver la représentabilité de $\mathrm{Pic}^r_{X/k}$ pour un r. On va prendre $r > 2g-2$

g = genre de X.

On dispose d'un morphisme de foncteurs :
$$F : \mathrm{Div}^r_X \to \mathrm{Pic}^r_{X/k},$$
$$D \mapsto \mathcal{O}(D) \qquad (\text{ou} : (\mathcal{L},s) \mapsto \mathcal{L})$$

<u>Prop</u> : S'il existe une section σ de F, $\mathrm{Pic}^r_{X/k}$ est représentable par un sous-schéma fermé de $X^{(r)}$.

<u>Dém</u> : $\varphi := \sigma \circ F$ morphisme $\mathrm{Div}^r_X \to \mathrm{Div}^r_X$, donc donné par un morphisme de variétés $X^{(r)} \to X^{(r)}$.

Soit Y le produit fibré :
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & X^{(r)} \arrow[d, "\Delta"] \\ X^{(r)} \arrow[r, "(1,\varphi)"'] & X^{(r)} \times_k X^{(r)} \end{tikzcd}$$
C'est un sous-schéma fermé de $X^{(r)}$, car Δ immersion fermée.

Alors, $\forall$ k-schéma T,
$$\begin{aligned} Y(T) &= \{(a,b) \in X^{(r)}(T) \times X^{(r)}(T),\ \begin{smallmatrix} a=b \\ a=\varphi(b) \end{smallmatrix}\} \\ &= \{a \in X^{(r)}(T),\ a = \varphi(a)\} \\ &= \{a \in X^{(r)}(T),\ a = \sigma(c),\ c \in \mathrm{Pic}^r_X(T)\} \\ &\simeq \mathrm{Pic}^r_X(T). \end{aligned}$$
■

Comment construire une telle section σ ? I.e., comment associer à une famille de fibrés en droites $\mathcal{L}$ de degré r un diviseur de Cartier effectif relatif ?

Le problème est que les fibres de F sont grosses : si T k-schéma, $t \in T$, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^r_X(T)$, par Riemann-Roch,

$$\dim H^0(\mathcal{L}_t) - \dim H^0(\omega_{X_t} \otimes \mathcal{L}_t^{-1}) = r+1-g$$

Or $\deg(\omega_{X_t} \otimes \mathcal{L}_{X_t}^{-1}) = \deg(\omega_{X_t}) - \deg(\mathcal{L}_{X_t})$

$$= 2g-2-r < 0$$

par choix de r, donc $H^0(\omega_{X_t} \otimes \mathcal{L}_{X_t}^{-1}) = 0$.

Ainsi $\dim H^0(\mathcal{L}_t) = r+1-g$, et donc les fibres de F ont dimension $r-g > g-2$.

Pour réduire la taille des fibres, on va fixer $\gamma = (P_1, \dots, P_{r-g})$ famille de k-points de X et ne considérer que les diviseurs $D \geq \sum P_i$.

Prop : Soit γ comme ci-dessus et $\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{O}(\sum P_i)$.
$\exists$ une sous-variété ouverte X^γ de $X^{(r)}$ tq $\forall$ k-sch T,
$$X^\gamma(T) = \{ D \in \mathrm{Div}^r_X(T),\ \dim H^0(\mathcal{O}(D_t - \textstyle\sum P_i)) = 1,\ \forall t \in T \}$$

Si P^γ est le sous-foncteur de Pic^n_X défini par $P^\gamma(T) = \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^n_X(T),\ \dim H^0(\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{L}_\gamma^{-1}) = 1\ \forall t \in T\}$

alors $F_\gamma : X^\gamma \to P^\gamma$ a une section.

Dém (idée) : Comme $\dim H^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\gamma^{-1}) = 1$ $\forall t$, on a par Riemann-Roch, $\dim H^1(\ldots) = 0$, donc $f_{T*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\gamma^{-1})$ définit un fibré en droites $\mathcal{M}$ sur T et on a un morphisme

$$f_T^* \mathcal{M} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\gamma^{-1} \quad \text{(adjonction)}$$

i.e. $$\mathcal{O}_{X_T} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\gamma^{-1} \otimes f_T^* \mathcal{M}^{-1}$$

que l'on peut composer avec le pullback de $\mathcal{L}_\gamma^{-1} \to \mathcal{O}_X$ pour obtenir

$$s_\gamma : \mathcal{O}_{X_T} \to \mathcal{L} \otimes f_T^* \mathcal{M}^{-1}.$$

Ainsi, $(\mathcal{L} \otimes f_T^* \mathcal{M}^{-1}, s_\gamma) \in X^\gamma(T)$ et s'envoie par F_γ sur $\mathcal{L} \otimes f_T^* \mathcal{M}^{-1} \sim \mathcal{L}$. ∎

De ceci on déduit par le même argument que dans la proposition que P^γ est représentable par une sous-variété fermée J^γ de X^γ.

De plus pour deux γ, γ' différents,

$P^\gamma \cap P^{\gamma'}$ sep par $J^{\gamma,\gamma'}$ t.q $J^{\gamma,\gamma'} \hookrightarrow J^\gamma$ et $J^{\gamma,\gamma'} \hookrightarrow J^{\gamma'}$ immersions ouvertes.

Comme $k = k^{sep}$, on peut recouvrir X par un nombre fini de X^{γ_i}, γ_i $(r-g)$-uplets.

On définit alors $J(X)$ en recollant les J^{γ_i} le long des $J^{\gamma_i,\gamma_i'}$. $J(X)$ représente Pic^r_X, donc aussi Pic^0_X.

Pic^0_X est un foncteur en groupes abéliens, donc $J(X)$ est un schéma en groupes. De plus, on a un morphisme surjectif

$$X^{(r)} \simeq \mathrm{Div}^r_X \to \mathrm{Pic}^r_X \simeq \mathrm{Pic}^0_X = J(X)$$

donc $J(X)$ est propre et donc une variété abélienne. ∎

Preuve géométrique du corps de classes non ramifié

Fixons G gpe abélien fini. Rappelons que nous voulons montrer que l'on a une équivalence de catégories:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{morphismes continus} \\ \mathrm{Gal}_K^{nr} \to G \end{matrix} \right\} \simeq \left\{ \begin{matrix} \text{morphismes continus} \\ C_K / \prod_v \mathcal{O}_v^\times \to G \end{matrix} \right\}$$

$$\chi \longmapsto \rho$$

t.q $\forall v$, $\chi(\mathrm{Frob}_v) = \rho(\pi_v)$.

On a déjà réinterprété géométriquement la catégorie de gauche comme : $\left\{ \begin{matrix} \text{morphismes continus} \\ \pi_1(X) \to G \end{matrix} \right\}$

Notons $\mathrm{Div}_X = \bigsqcup_{r \geq 0} \mathrm{Div}_X^r$ l'espace de modules des diviseurs de Cartier eff rel. de X/k.

On a des morphismes

$$m, p_1, p_2 : \mathrm{Div}_X \times \mathrm{Div}_X \to \mathrm{Div}_X, \quad i : X \simeq \mathrm{Div}_X^1 \hookrightarrow \mathrm{Div}$$

(addition des diviseurs et projections)

<u>Prop</u>: Pour tout morphisme $\chi : \pi_1(X) \to G$ continu, $\exists!$ morphisme continu $\tilde{\chi} : \pi_1(\mathrm{Div}_X) \to G$ t.q.

$$m^* \tilde{\chi} = p_1^* \tilde{\chi} + p_2^* \tilde{\chi} \quad \text{et} \quad i^* \tilde{\chi} = \chi.$$

comme morphisme $\pi_1(\mathrm{Div}_X \times \mathrm{Div}_X) \to G$

<u>Dém</u> (idée) : χ correspond à $Y \to X$ étale galoisien de groupe G. Pour $r \geq 1$, considérons

$$Y_r = Y^r / \ker(G^r \xrightarrow[\text{somme}]{} G)$$

morphisme car G abélien !

C'est un revêtement étale galoisien de X^r de groupe G, correspondant à

$$\pi_1(X^r) \xrightarrow[\text{projections}]{} \pi_1(X)^r \xrightarrow{(\chi,\dots,\chi)} G^r \to G.$$

De plus $Y_r \to X^r$ est S_r-équivariant, et l'action des groupes d'inertie sur les fibres est triviale (le vérifier pour $r=2$ pour s'en convaincre !).

Par une proposition vue dans le cours 1, Y_r correspond donc à un revêtement étale galoisien de groupe G de $X^{(r)} = \mathrm{Div}^r$. Ceci valant pour tout r, on a construit $\tilde{\chi}$ et la construction montre qu'il a les propriétés souhaitées. ∎

Réciproquement, $\tilde{\chi} : \pi_1(\mathrm{Div}_X) \to G$ avec la propriété $m^*\tilde{\chi} = p_1^*\tilde{\chi} + p_2^*\tilde{\chi}$ provient nécessairement de $\chi : \pi_1(X) \to G$ par la construction de la proposition.

Les morphismes d'Abel-Jacobi définis ci-dessus induisent $AJ : \mathrm{Div}_X \to \mathrm{Pic}_X$.

Comme Pic_X est un schéma en groupes, on a aussi des morphismes : $m, p_1, p_2 : \mathrm{Pic}_X \times \mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Pic}_X$.

Idem pour le sous-schéma Pic^0_X.

<u>Prop</u> : Le foncteur

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{morphismes continus} \\ \tilde{\rho} : \pi_1(\mathrm{Pic}_X) \to G \\ \text{t.q. } m^*\tilde{\rho} = p_1^*\tilde{\rho} + p_2^*\tilde{\rho} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{morphismes} \\ \rho : \mathrm{Pic}_X(k) \to G \end{array} \right\}$$

$$\tilde{\rho} \longmapsto \left(\rho : (x : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Pic}_X) \mapsto \tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_x) \right)$$

est une équivalence de catégories.

<u>Dém</u> : D'abord, le foncteur est bien défini car la propriété imposée à $\tilde{\rho}$ implique que ρ est un morphisme de groupes.

Soit $L : \mathrm{Pic}^0_X \to \mathrm{Pic}^0_X$, $\mathcal{L} \mapsto \mathrm{Frob}_k^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$.

C'est un morphisme fini étale surjectif, galoisien de groupe $\mathrm{Pic}^0_X(k)$.

Donc on a un morphisme $\pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \to \mathrm{Pic}^0_X(k)$.
qui envoie $\mathrm{Frob}_{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{L}$.

Donc à tout morphisme $\mathrm{Pic}^0_X(k) \to G$, on peut associer un morphisme continu $\pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \to G$ par composition. Cette construction définit un inverse de l'analogue du foncteur de la proposition, où l'on aurait remplacé Pic_X par Pic^0_X des deux côtés : dans une direction, cela découle de ce qu'on vient de dire ; dans l'autre, il suit qu'un morphisme $\tilde{\rho} : \pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \to G$ continu avec $m^*\tilde{\rho} = p_1^*\tilde{\rho} + p_2^*\tilde{\rho}$ se factorise par
$$\pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \to \mathrm{Pic}^0_X(k),$$
i.e. que
$\pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \xrightarrow{L_*} \pi_1(\mathrm{Pic}^0_X) \xrightarrow{\tilde{\rho}} G$ est trivial. Comme $m^*\tilde{\rho} = p_1^*\tilde{\rho} + p_2^*\tilde{\rho}$, cette composition est par définition de L la même chose que $\mathrm{Frob}_k^*\tilde{\rho} - \rho$, qui est bien nul.

Donc la proposition est démontrée pour Pic_X remplacé par Pic^0_X.

En général, supposons pour simplifier $X(k) \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Pic}_X = \mathrm{Pic}^0_X \times \mathbb{Z}$, donc on voit qu'il suffit de montrer la proposition également pour Pic_X remplacé par $\mathbb{Z}$. Ce cas est immédiat. ∎

Pourquoi cela nous est-il utile ? Nous allons voir en semaine 3 que l'on dispose d'un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Pic}_X(k) \simeq C_K / \prod_v \mathcal{O}_v^\times$$

envoyant $\mathcal{O}(x) \longmapsto \pi_v$ si $x \in |X| \leftrightarrow v$.

Admettant ceci, nous voyons que le travail effectué nous ramène à montrer que le foncteur AJ^* induit une équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{morphismes continus} \\ \tilde{\rho} : \pi_1(\mathrm{Pic}_X) \to G \\ \text{t.q. } m^*\tilde{\rho} = p_1^*\tilde{\rho} + p_2^*\tilde{\rho} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{morphismes continus} \\ \tilde{\chi} : \pi_1(\mathrm{Div}_X) \to G \\ \text{t.q. } m^*\tilde{\chi} = p_1^*\tilde{\chi} + p_2^*\tilde{\chi} \end{array} \right\}$$

Noter que les catégories considérées des deux côtés ne changent pas si l'on remplace Pic_X, resp. Div_X, par $\mathrm{Pic}_X^{\geq s} = \bigsqcup_{r \geq s} \mathrm{Pic}_X^r$ resp. $\mathrm{Div}_X^{\geq s}$ $(s \geq 0)$.

Nous allons tout de suite exploiter cette remarque, en prenant $s = 2g-1$.

Pour $r \geq s$, si $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^r_X(T)$, T k-schéma, corresp. à $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^r(X_T)$, $\mathcal{E} := f_{T,*}\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel (car par Riemann-Roch $R^1 f_{T,*}\mathcal{L} = 0$) et le pullback de $AJ^r : \mathrm{Div}^r_X \to \mathrm{Pic}^r_X$ à T s'identifie à $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to T$ (notons que si on change $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}$, on tord $\mathcal{E}$ par un fibré en droites M sur T, ce qui ne change pas $\mathbb{P}(\mathcal{E})$!).

Appliquant ceci à $T = \mathrm{Pic}^r_X$ et $f = id$, on voit que AJ^r est un fibré projectif en particulier propre, plat à fibres géométriques connexes. Appliquant la suite exacte d'homotopie du cours précédent et $\pi_1(\mathbb{P}^r_{\bar{k}}) = 0$, on en déduit :

$$\forall r > 2g-2, \qquad \pi_1(\mathrm{Div}^r_X) \simeq \pi_1(\mathrm{Pic}^r_X).$$

D'où l'équivalence cherchée et la fin de la preuve. ■