Cours 3

Du corps de classes aux conjectures de Langlands pour GL_n : un aperçu

Références :

- Gelbart, An elementary introduction to the Langlands program, Bulletin of the AMS
- Gelbart, Automorphic forms on adèle groups, §1,2,3, Annals of Math. Studies.

Riemann :

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1-p^{-s})^{-1}, \quad Re(s)>1$$

Extension méromorphe à tout le plan complexe avec pôle simple en $s=1$, équation fonctionnelle.

Dedekind : généralisation à tout corps de nombres K. Définissons :

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{I \text{ idéal} \\ \text{de } \mathcal{O}_K}} \frac{1}{(NI)^s} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ idéal premier}} (1-(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

conséquence de la factorisation unique en idéaux premiers

Convergente pour $Re(s)>1$. De nouveau, extension méromorphe à tout le plan complexe avec pôle simple en 1 et équation fonctionnelle.

Pour $K=\mathbb{Q}$, on retrouve la fonction zêta de Riemann.

On peut généraliser encore cette construction dans deux directions a priori différentes :

1) (Dirichlet, Hecke)

K corps de nombres, $\chi : C_K \to \mathbb{C}^\times$ un caractère continu.

Rq : χ correspond donc à un caractère continu $\tilde{\chi} : \mathbb{I}_K \to \mathbb{C}^\times$ trivial sur $K^\times$ et les caractères continus $\mathbb{I}_K \to \mathbb{C}^\times$ sont en bijection avec les familles $(\chi_v)_v$ de caractères continus $\chi_v : K_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ qui sont non ramifiés pour presque tout v.

On définit alors :

$$L_K(\chi, s) := \sum_{\substack{I \text{ idéal} \\ \text{de } \mathcal{O}_K}} \frac{\chi(I)}{(NI)^s} = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \text{ idéal} \\ \text{premier}}} \left(1 - \chi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

où $\chi(I)$ est défini multiplicativement, avec pour $I = \mathfrak{p}$ premier $\leftrightarrow$ place v de K,

$$\chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \chi_v(\pi_v) & \text{si } \chi_v \text{ n.r. en } v, \ \pi_v = \text{unif.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\chi = 1$, on retrouve les fonctions zêta de Riemann et Dedekind.

Ex : $K = \mathbb{Q}$, χ est nécessairement de la forme $\chi = \chi_0 |\cdot|_{\mathbb{A}}^t$ avec χ_0 d'ordre fini.

Un tel χ_0 est la même chose qu'un caractère de Dirichlet ψ.

Donc dans ce cas, $L_{\mathbb{Q}}(\chi, s) = L(s+t, \psi)$ fonction L de Dirichlet. •

Hecke, puis Tate : prolongement méromorphe (et même analytique pour $\chi \neq 1$ primitif) et équation fonctionnelle.

2) (Artin)

K corps de nombres, L/K ext. finie galoisienne de groupe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit $\sigma : G \to GL(V)$, V $\mathbb{C}$-ev de dim finie une représentation de G.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, et idéal $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_L$ divisant $\mathfrak{p}$, $\sigma(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ bien défini sur

$V^{\sigma(I_\mathfrak{q})}$ et $\det(1-\sigma(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})N\mathfrak{p}^{-s}|_{V^{\sigma(I_\mathfrak{q})}})^{-1}$ ne dépend que de $\mathfrak{p}$ (pas de $\mathfrak{q}$), et pour presque tout $\mathfrak{p}$, cet élément, noté $L_\mathfrak{p}(\sigma,s)$, est un polynôme de degré n en $(N\mathfrak{p})^{-s}$.

On définit finalement :

$$L_K(\sigma,s) = \prod_\mathfrak{p} L_\mathfrak{p}(\sigma,s)$$

convergente pour $\mathrm{Re}(s)>1$.

Artin vérifie les propriétés suivantes :

- (additivité) $L_K(\sigma\oplus\sigma',s) = L_K(\sigma,s)L_K(\sigma',s)$
- (induction) $K\subset L\subset L'$ ext. finies galoisiennes

$\sigma : \mathrm{Gal}(L'/L)\to GL(V)$ représentation et $\sigma' = \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(L'/L)}^{\mathrm{Gal}(L'/K)}\sigma$. Alors :

$$L_K(\sigma',s) = L_K(\sigma,s).$$

Les fonctions L d'Artin apparaissent naturellement pour la raison suivante :

Soit $K/\mathbb{Q}$ Galois, groupe G.

Alors $$\mathrm{ind}_1^G(\mathbb{1}) = \bigoplus_{\substack{\sigma \text{ rep} \\ \text{irréd de } G}} \dim(\sigma)\, \sigma$$

Donc par additivité et induction,

$$\underbrace{L_K(\mathbb{1}, s)}_{= \zeta_K(s)} = L_{\mathbb{Q}}(\mathrm{ind}_1^G \mathbb{1}, s) = \prod_{\sigma} L_{\mathbb{Q}}(\sigma, s).$$

Donc elles permettent d'exprimer la fonction zêta de Dedekind d'un "grand" corps de nombres (ici, K) en termes de fonctions L associées à un sous-corps (ici, $\mathbb{Q}$).

Les deux types de fonctions L sont a priori différentes. Les premières peuvent être étudiées par voie analytique et ont des propriétés remarquables (prolongement, éq^{n} fonctionnelle). Les secondes sont plus mystérieuses mais interviennent naturellement dans l'étude des fonctions zêta des corps de nombres (qui contiennent de l'information arithmétique sur ceux-ci).

La théorie du corps de classes donne une relation inattendue entre les deux :

Soit K corps de nombres, L/K ext. finie <u>abélienne</u> de groupe G. Si $\sigma : G \to \mathbb{C}^\times$ et $\chi : C_K \to \mathbb{C}^\times$ se correspondent par la théorie du corps de classes, on a :

$$L_K(\sigma, s) = L_K(\chi, s).$$

<u>Ex:</u> q premier impair.

$$\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right) \qquad \text{caractère de Dirichlet de conducteur } q$$

Soit $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}} q}\right) = \begin{cases} \mathbb{Q}(\sqrt{q}) & q \equiv 1 \ [4] \\ \mathbb{Q}(\sqrt{-q}) & q \equiv 3 \ [4] \end{cases}$

Alors $\zeta_K(s) = \zeta(s) \underbrace{L_{\mathbb{Q}}(\sigma, s)}_{\sigma \text{ caractère non trivial de } \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \overset{(*)}{=} \zeta(s) L_{\mathbb{Q}}(\chi, s)$

$(*)$: on a $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_q)$.
(sommes de Gauss !)

L'application d'Artin envoie $x = (r, u) \in C_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_{>0} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ sur $\psi(x)$ t.q. $\psi(x)\zeta_q = \zeta_q^{u^{-1}}$. Restriction à $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ = morphisme non trivial $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$. $\Longrightarrow (*)$.

Or : (par déf.) $$\zeta_K(s) = \prod_{p \text{ déc.}} (1-p^{-s})^{-2} \prod_{p \text{ inerte}} (1-p^{-2s})^{-1} \prod_{p \text{ ramifié}} (1-p^{-s})^{-1}$$

Donc le contenu de (*) est :

$$p \text{ ramifié} \iff \chi(p) = 0$$
$$p \text{ décomposé} \iff \chi(p) = 1$$
$$p \text{ inerte} \iff \chi(p) = -1 .$$

D'un autre côté, on peut aussi décrire les trois propriétés ci-dessus en termes des symboles $\left(\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}} q}{p}\right)$ (car il s'agit d'analyser $\mathbb{F}_p[X]/(X^2-(-1)^{\frac{q-1}{2}} q)$.)

En égalant les deux conditions, on retrouve la loi de réciprocité quadratique.

<u>Question</u> : Soit L/K finie galoisienne, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ <u>non</u> abélien, et $\rho : G \to GL(V)$ qui n'est pas une somme de caractères. Comment décrire $L_K(\rho, s)$ (ou même ρ elle-même) en termes d'analogues des caractères de Hecke ?

Rappelons que si χ caractère de Hecke, $L_K(\chi, s)$ a un prolongement + éq^n fonctionnelle. On aimerait avoir ces propriétés en général.

Hecke, en analysant la preuve de Riemann de l'éq^n fonctionnelle de la fonction ζ (où on l'écrit comme transformée de Mellin de la fonction θ), a compris comment caractériser les séries de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ satisfaisant un cas particulier de ces propriétés :

Posons $\Phi(s) = \underbrace{(2\pi)^{-s}\Gamma(s)}_{\text{facteur de normalisation}} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$

et $f(z) = \sum_{n=1} a_n e^{2i\pi n z}$.

On suppose $a_n = O(n^c)$, $c>0$, pour garantir des propriétés de CV raisonnables.

Alors pour $k>0$, s'équivalent :

(i) Φ se prolonge en une fonction entière, bornée sur chaque bande verticale et $\Phi(k-s) = i^k \Phi(s)$ (éq^n fonctionnelle);

(ii) $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$.

Autrement dit, la condition sur la série de Dirichlet Φ se reformule en une condition sur f, que l'on peut voir comme fonction holomorphe sur $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

t.q. $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = SL_2(\mathbb{Z}).$$

C'est un exemple de "forme automorphe cuspidale" (pour SL_2). Espace noté $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Mieux, Hecke donne aussi une condition garantissant que $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ a une décomposition en produit eulérien (comme pour les fonctions L des caractères de Hecke et d'Artin), si elle satisfait déjà les conditions ci-dessus :

Supposons $f(z) = \sum a_n e^{2i\pi n z} \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Alors les a_n sont multiplicatifs ($a_{nm} = a_n a_m$, $n \wedge m = 1$) (et donc $\sum \frac{a_n}{n^s}$ a un produit eulérien) ssi f est une fonction propre des opérateurs de Hecke $T(p)$, p premier : $T(p)f = a_p f$. De plus, dans ce cas,

$$\sum_n \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}\right)^{-1}.$$

Rappelons que les opérateurs de Hecke $T(p)$ pour $f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ sont définis par $= \sum a_n q^n$, $q = e^{2i\pi z}$.

$$T(p)f = \frac{1}{p}\left(\sum_n p\, a_{np}\, q^n + \sum_n p^k a_n q^{pn}\right).$$

On va maintenant reformuler ce qui précède en termes adéliques. Cela permettra de clarifier la relation avec le cas GL_1 et de décrire de façon plus transparente l'action des opérateurs de Hecke.

Précisément pour discuter de l'action de Hecke, il est commode de passer du groupe SL_2 au groupe GL_2.

On a la décomposition :

$$GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{Q}).GL_2(\mathbb{R})^+.K$$

pour tout sous-groupe compact ouvert K de $GL_2(\mathbb{A}_f)$.

Supposons $\Gamma = K.GL_2(\mathbb{R})^+ \cap GL_2(\mathbb{Q})$ pour un tel K.

Pour $g \in GL_2(\mathbb{A})$, $g = \gamma g_\infty k$, posons

$$\phi_f(g) = (ci+d)^{-k} f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) \quad \text{si } g_\infty = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bien défini et fait correspondre à $f \in S_k(\Gamma)$ une fonction

$$\phi_f : GL_2(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{A}) / K \to \mathbb{C}$$

satisfaisant à certaines conditions à la place réelle ($\leftrightarrow$ holomorphie) et à la condition :

$$\forall g \in GL_2(\mathbb{A}), \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} f(vg)\, dv = 0, \quad \underset{GL_2}{\overset{N}{\cap}} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}$$

traduisant la cuspidalité de f.

Convenablement formulé, l'application $f \mapsto \phi_f$ donne une correspondance bijective.

La condition que f est vecteur propre des opé-
-rateurs de Hecke s'écrit :

$$T_p \phi_f = a_p \phi_f \quad \text{pour tout } p, \text{ avec}$$

$$(T_p \phi)(g) = \int_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)GL_2(\mathbb{Z}_p)} \phi(gh)\, dh.$$

(dh = mesure de Haar normalisée par $\int_{GL_2(\mathbb{Z}_p)} dh = 1$)

<u>Conclusion provisoire</u> : K corps de nb, L/K finie galois de groupe G, $\sigma : G \to GL(V)$ irréductible comme dans la déf. de la fonction ζ de K.

À σ, on aimerait associer

$$f : GL_n(K) \backslash GL_n(\mathbb{A}_K) / \text{ss.gr. compact ouvert} \to \mathbb{C}$$

t.q. $L(\sigma, s) = \underbrace{L(f, s)}$.

défini jusqu'ici seulement pour $n = 1, 2$ mais se défi-
-nit aussi en général et a les m̂ bonnes propriétés (prolongement + éq^n fonctionnelle)

Comme $L(\sigma, s)$ est un produit eulérien, f doit être "forme propre d'opérateurs de Hecke".

Dans la fin de ce cours, nous allons énoncer un cas particulier d'une telle conjecture plus générale. Toutefois, nous le ferons dans un contexte un peu différent :

- Tout ce qui précède a été fait pour les <u>corps de nombres</u>, mais garde un sens pour les <u>corps de fonctions</u> (et devient même plus simple). Nous nous plaçons dans ce cadre.

- Au lieu de regarder des représentations à coefficients complexes, nous allons fixer $\ell \neq p$ et regarder des représentations (continues) sur des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-ev de dim $< \infty$. C'est plus général : $\sigma : \mathrm{Gal}_K \to GL(V)$ V $\mathbb{C}$-ev de dim $< \infty$ est automatiq^t d'image finie, donc peut aussi être réalisée sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

changement de notation!

Soit F un corps de fonctions, X la courbe projective lisse sur $k = \overline{\mathbb{F}_p} \cap F$ correspondante.

Soit $\sigma : \mathrm{Gal}_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ une représentation continue irréductible. On va même la supposer géométriquement irréductible (= irréductible en restriction à $\mathrm{Gal}(F^{sep}/\bar{k}.F)$).

En outre, nous allons supposer σ non ramifiée à toutes les places, pour simplifier les choses et car ce sera le seul cas où les méthodes géométriques de ce cours seront opérantes.

Rq : Hypothèse analogue à celle faite pour $n=1$ dans les cours 1-2.

Conjecture (Langlands)

Pour toute $\sigma : \mathrm{Gal}_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ comme ci-dessus, il existe une unique fonction (à scalaire dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ près)

$$f_\sigma : GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / GL_n(\hat{\mathcal{O}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

$\left(\hat{\mathcal{O}} = \prod_v \mathcal{O}_v \right)$ telle que :

- f est cuspidale : $\forall$ partition $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ de parabolique std associé $P_{\underline{n}}$, radical unipotent $N_{\underline{n}}$, $\int_{N_{\underline{n}}(F) \backslash N_{\underline{n}}(\mathbb{A}_F)} f_\sigma(vg)\, dv = 0$ $\forall g \in GL_n(\mathbb{A}_F)$ et dv mesure de Haar.

- f est vecteur propre des opérateurs de Hecke, i.e. $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall x \in |X|$, si

$$T_x^i(f) := \left(g \longmapsto \int_{GL_n(\mathcal{O}_x) \begin{pmatrix} \pi_x & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pi_x & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} GL_n(\mathcal{O}_x)} f(gh)\, dh \right)$$

(π_x répété i-fois)

(dh mesure de Haar avec $\int_{GL_n(\mathcal{O}_x)} dh = 1$)

alors $T_x^i(f_\sigma) = a_x^i(\sigma) \cdot f_\sigma$, $a_x^i(\sigma) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$

avec valeurs propres déterminées par σ :

$\forall i = 1, \dots, n, \ \forall x \in |X|, \quad a_x^i(\sigma) = q_x^{-\frac{i(i-1)}{2}} \operatorname{tr}\left(\Lambda^i \sigma(\mathrm{Frob}_x)\right)$

avec $q_x = |k(x)|$ et Frob_x classe de conjugaison.

(Cette dernière relation doit être pensée comme garantissant la coïncidence des fonctions L de σ et f_σ. Toutefois, c'est cette formulation que nous retiendrons pour la suite du cours, où l'on ne parlera plus de fonctions L.)