Cours 4

Formes automorphes non ramifiées et fonctions de Whittaker

Références :

- Gelbart, Automorphic forms on adèle groups, §6, Annals of Math. Studies.
- Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n, Annals of Math.
- Shintani, On an explicit formula for class 1 "Whittaker functions" on GL_n over p-adic fields, Proc. Japan Acad.

Dans ce cours, nous allons expliquer une approche directe à la conjecture formulée dans le cours dernier ("Langlands non ramifié pour GL_n sur un corps de fonctions") s'appuyant sur des résultats de Shalika et Shintani. Cette approche ne fonctionnera pas directement, mais servira d'inspiration pour la suite.

Un peu d'analyse de Fourier :

<u>Déf-Prop</u> : Soit G un groupe localt compact. Une mesure de Haar à gauche / à droite est une mesure de Radon sur G non nulle invariante par translations à gauche / à droite. Une telle mesure (à gauche ou à droite) existe et est unique à scalaire près.

<u>Déf</u> : Soit G un groupe <u>abélien</u> topologique (écrit multiplicativement). On définit le <u>dual de Pontryagin</u> de G

comme : $\hat{G} = \{$ morphismes continus $G \to S^1\}$

avec la topologie compacte-ouverte (V voisinage de $1 \in S^1$, K sous-ensemble compact de G, $\{\chi \in \hat{G},\ \chi(K) \subseteq V\}$ forment une base de voisinages de 1.)

Rq : Si G est localement compact / discret / compact, $\hat{G}$ est localement compact / compact / discret.

Soit G un groupe abélien local^t compact et dx mesure de Haar sur G supposée bi-invariante.

Def : Soit $f \in L^1(G, \mathbb{C})$ (pour dx).
La transformée de Fourier de f est :

$$\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$$
$$\chi \longmapsto \int_G f(x)\, \overline{\chi}(x)\, dx. \quad \text{(bien défini)}.$$

Ex : $G = \mathbb{R}$ $\quad t \in \mathbb{R} \leftrightarrow s \mapsto e^{ist}$

et $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{ist}\, ds$.

Prop (formule d'inversion de Fourier)
$\exists$ mesure de Haar $d\chi$ sur $\hat{G}$ telle que

$$\forall f \in L(G, \mathbb{C}), \quad f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\, \chi(x)\, d\chi .$$

<u>Cor</u> : Soit G comme ci-dessus. Alors le morphisme $\alpha : G \to (\widehat{\hat{G}})$, $\alpha(x)(\chi) = \chi(x)$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Dém (idée) : Injectivité : Soit $x \in G$, $x \neq 1$. Mq $\exists \chi \in \hat{G}$ $\chi(x) \neq 1$. Sinon, on aurait

$$\hat{f} = (L_x f)^\wedge \quad \forall f$$

$$(L_x f := f(- + x))$$

Donc par inversion de Fourier, $f = L_x f$, $\forall f$, absurde. ∎

Considérons le cas $G = F_v$, v place de F.

Groupe localement compact abélien pour l'addition.

Soit $\psi \in \hat{F}_v$ non trivial ; tout autre $\psi' \in \hat{F}_v$ s'écrit sous la forme $\psi' = \psi(a -)$, $a \in F_v$, i.e.

$$F_v \to \hat{F}_v, \quad a \mapsto \psi_a := \psi(a -)$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

Construction d'un ψ non trivial :

- Cas $F = \mathbb{F}_p(t)$.

a) $v = \infty$, $F_v = \mathbb{F}_p((t^{-1}))$. Si $x = \sum_{n=-\infty}^{r} a_n t^n$ on pose $\psi_v(x) = e^{2i\pi a_1/p} \in S^1$.

b) $v \leftrightarrow \pi$ irréductible dans $\mathbb{F}_p[T]$. Tout $x \in F_v$ s'écrit de façon unique $\sum_{n=-r}^{\infty} a_n \pi^n$, avec $a_n \in k$ = corps résiduel de (π). On pose :
$$\psi_v(x) = e^{2i\pi \, \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(a_{-1})/p}.$$

- Cas général : F extension finie séparable de $F_0 = \mathbb{F}_p(T)$. On pose pour v place de F au-dessus d'une place w de F_0 :
$$\forall x \in F_v, \quad \psi_v(x) = \psi_w(\mathrm{tr}_{F_v/F_{0,w}}(x)).$$

Passage aux adèles :

Fait général : (G_v) famille de groupes abéliens localᵗ cpcts, $(H_v)_v$ sous-groupes compacts ouverts. Le dual de Pontryagin du produit restreint $\prod_v{}' G_v$ (par rapport aux $(H_v)_v$) est le produit restreint $\prod_v{}' \hat{G}_v$, par rapport aux $(\{f \in \hat{G}_v, f_{|H_v} = 1\})_v$.

Il existe en outre une unique mesure de Haar dg sur $G = \prod_v{}' G_v$ tq $\forall$ ensemble S fini d'indices, la restriction de dg à $\prod_{v \in S} G_v \prod_{v \notin S} H_v$ est $\prod_v dg_v$, si l'on a fixé des mesures de Haar sur G_v pour tout v, avec $\int_{H_v} dg_v = 1$.

Si les f_v sont des fonctions intégrables sur les G_v avec $f_{v|H_v} = 1$ pour presque tout v, $f = \prod_v f_v$ bien défini et $\hat{f} = \prod \hat{f}_v$.

→ En pratique, l'analyse sur G se ramène donc à celles sur tous les G_v.

Appliquons ceci à $\mathbb{A}_F$. Choisissons pour tout v, ψ_v caractère additif continu, non trivial pour presque tout v. Alors si l'on pose

$$\forall x \in \mathbb{A}_F, \quad \psi(x) = \prod_v \psi_v(x_v),$$

$\psi \in \widehat{\mathbb{A}_F}$ et le morphisme

$$a \in \mathbb{A}_F \longmapsto \psi_a := \psi(a-) \in \widehat{\mathbb{A}_F}$$

est un isomorphisme de groupes topologiques.

Notons de plus que l'on peut choisir les ψ_v de sorte que $\psi|F = 1$, et donc $\psi_a = 1$ $\forall a \in F$ et ψ induit aussi un isomorphisme de groupes topologiques $\underset{\text{discret}}{F} \xrightarrow{\sim} \underset{\text{compact}}{\widehat{\mathbb{A}_F/F}}$

Dans la suite, les fonctions L^1 qui nous intéresse-seront seront localement constantes, donc on peut remplacer $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (abstraitement isomorphes).

Retour à la conjecture :

Soit $f : GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ lisse (i.e. invariante par l'action à droite d'un sous-groupe compact ouvert) et cuspidale.

Rq : Un th. de Harder garantit qu'une telle f est à support compact modulo le centre $Z_n(\mathbb{A}_F) \subseteq GL_n(\mathbb{A}_F)$ donc si $Z_n(\mathbb{A}_F)$ agit sur f via un caractère unitaire χ fixé, f est intégrable et vérifie la formule d'inversion de Fourier. Nous utiliserons ceci dans la suite sans plus de commentaire.

Rq : Nous n'avons pas défini précisément la notion de forme automorphe mais n'en aurons pas besoin.

Commençons par le cas $n=2$.

Notons $N = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix} \subseteq GL_2$. Fixons $g \in GL_2(\mathbb{A}_F)$.

Considérons
$$h_g : \underset{\simeq F\backslash \mathbb{A}_F}{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell .$$
$$n \longmapsto f(ng).$$

Écrivons la formule d'inversion de Fourier pour h_g deux fois : $\forall n' \in F \backslash \mathbb{A}_F$,

$$h_g(n') = \int_{F = \widehat{F \backslash \mathbb{A}_F}} \hat{h}_g(\gamma)\, \psi_{n'}(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_F \left(\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} h_g(n)\, \psi_\gamma^{-1}(n) \right) \psi_{n'}(\gamma)\, d\gamma$$

Évaluons en $n' = 1$:

$$f(g) = h_g(1) = \sum_{\gamma \in F} \left(\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} f(ng)\, \psi^{-1}(\gamma n)\, dn \right)$$

Comme f est supposée cuspidale,

$\forall g,\ \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} f(ng)\, \psi^{-1}(n) = 0$ (par déf.)

D'où finalement :

$$f(g) = \sum_{\gamma \in F^\times} \left(\int_{F \backslash \mathbb{A}_F} f(ng)\, \psi^{-1}(\gamma n)\, dn \right)$$

que l'on réécrit

$$f(g) = \sum_{\gamma \in F^\times} W_{f,\psi}\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right)$$

avec

$$W_{f,\psi} : g \longmapsto \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} f(ng)\, \psi^{-1}(n)\, dn.$$

(W comme Whittaker)

Rq : dans cette dernière réécriture, on a utilisé l'invariance de f par $\begin{pmatrix} F^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Au total on a seulement utilisé l'invariance par $Mir_2(F)$, $Mir_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq GL_2$!

La fonction $W_{f,\psi}$ vit dans l'espace

$$C^\infty(GL_2(\mathbb{A}_F))^{(N(\mathbb{A}_F),\psi)} := \left\{ \begin{array}{l} W : GL_2(\mathbb{A}_F) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ \text{lisses telles que} \\ \forall n \in N(\mathbb{A}_F),\ g \in GL_2(\mathbb{A}_F) \\ W(ng) = \psi(n) W(g). \end{array} \right\}$$

Pour n général, on démontre :

<u>Prop</u> : Notons $Mir_n = \begin{pmatrix} GL_{n-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq GL_n$.

L'application

$$\Phi : C^\infty(GL_n(\mathbb{A}_F))^{(N_n(\mathbb{A}_F),\psi)} \longrightarrow C^\infty_{cusp}(Mir_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F))$$

"espace de Whittaker"

$$W \longmapsto \sum_{\gamma \in N_{n-1}(F)\backslash GL_{n-1}(F)} W\left(\begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} - \right)$$

où ψ est un certain caractère de $N_n(\mathbb{A}_F)$ en posant $\psi(n) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} n_{i,i+1}\right)$, est un isomorphisme $GL_n(\mathbb{A}_F)$-équivariant (action par translations à droite).

<u>Dém</u> (en mot) La preuve se fait par récurrence sur n. Si pour $m \leq n$ et $x \in GL_m$, on note $d[x] = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \in GL_n$ on montre que :

$$f(g) = \sum_{\gamma_{n-1} \in Mir_{n-1}(F)\backslash GL_{n-1}(F)} \cdots \sum_{\gamma_1 \in F^\times} W_{f,\psi}(d[\gamma_1] \ldots d[\gamma_{n-1}] \cdot g), \quad \forall f \in C^\infty_{cusp}(Mir_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F)), \ \forall g \in GL_n(\mathbb{A}_F).$$

avec $W_{f,\psi}$ défini de façon analogue. La formule s'en déduit. ∎

L'intérêt principal de Φ est qu'il montre que construire un élément de $C^\infty_{cusp}(Mir_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F))$ est, malgré les apparences, un problème local : on peut définir pour toute place v un analogue local de l'espace de Whittaker et si W_v en est un élément presque partout trivial sur $GL_n(\mathcal{O}_v)$, on peut considérer $W = \prod W_v$.

La discussion jusqu'ici fonctionne sans hypothèse sur le niveau. Pour l'énoncé qui suit, il [est] essentiel d'être en niveau 1 :

<u>Th</u> (Shintani, Casselman-Shalika) Pour tout $x \in |X|$, γ classe de conjugaison dans $GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, il existe une fonction explicite $W_{\gamma,x} : GL_n(F_x) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ telle que :

- $W_{\gamma,x}$ est inv. à droite par $GL_n(\mathcal{O}_x)$.
- $W_{\gamma,x}(1) = 1$

- $\forall n \in N_n(F_x)$, $\forall g \in GL_n(F_x)$ $\quad W_{\gamma,x}(ng) = \psi_x(n)\, W_{\gamma,x}(g)$

- $\forall i = 1, \dots, n$,

$$T_x^i(W_{\gamma,x}) = q_x^{-\frac{i(i-1)}{2}}\, \mathrm{tr}(\Lambda^i \gamma)\, W_{\gamma,x}.$$

$$\Big(:= \int_{GL_n(\mathcal{O}_x)\begin{pmatrix} \pi & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pi & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} GL_n(\mathcal{O}_x)} W_{\gamma,x}(-h)\,dh \Big)$$

(π : i-fois)

De plus, cette fonction est uniquement caractérisée par ces propriétés.

Soit $\sigma : Gal_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ comme dans la conjecture. Comme σ est non-ramifiée partout, classe de conjugaison $\sigma(\mathrm{Frob}_x)$ $\forall x \in |X|$.

Posons : $W_\sigma : GL_n(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$

$$g \longmapsto \prod_{x \in |X|} W_{\sigma(\mathrm{Frob}_x),x}(g_x)$$

Alors $W_\sigma \in C^\infty(GL_n(\mathbb{A}_F))^{(N_n(\mathbb{A}_F),\psi)}$

et $f'_\sigma := \Phi(W_\sigma) \in C^\infty_{cusp}(Mir_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F))$

est invariante à droite par $GL_n(\hat{\mathcal{O}})$ et

$\forall x \in |X|$, $\forall i = 1, \dots, n$, $T^i_x(f'_\sigma) = q_x^{-\frac{i(i-1)}{2}} \mathrm{tr}(\Lambda^i \sigma(\mathrm{Frob}_x))$.

f'_σ.

De plus unique avec ces propriétés à scalaire près. Par conséquent, on voit que la conjecture de Langlands non ramifiée est <u>équivalente</u> à demander que f'_σ est en fait $GL_n(F)$-invariante à gauche et donc descend en

$$f_\sigma : GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F)/GL_n(\hat{\mathcal{O}}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

(avec les propriétés voulues).

Il nous faut donc trouver un moyen de traduire du côté automorphe la condition que les classes de conjugaison $(\sigma(\mathrm{Frob}_x))_{x\in|X|}$ ne sont pas données aléatoirement, mais proviennent d'une représentation continue irréductible σ.

Malheureusement, il semble difficile de montrer cette invariance directement. Ce problème est à rapprocher de celui évoqué la semaine dernière pour GL_1 : montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_F &\longrightarrow \mathrm{Gal}_F^{nr,ab} \\ (a_x) &\longmapsto \prod_x \mathrm{Frob}_x^{\mathrm{ord}_x(a_x)} \end{aligned}$$

se factorise par $F^\times \backslash \mathbb{I}_F$. ("loi de réciprocité")

Tout comme pour GL_1, nous allons reformuler et prouver (si le temps le permet...) cette invariance par voie <u>géométrique</u> dans la suite de ce cours.