Cours 5

Faisceaux ℓ-adiques et fonctions ; fibrés vectoriels et faisceaux cohérents sur une courbe

Références :

- Freitag-Kiehl, Étale Cohomology and the Weil Conjecture, Ch I, § 1, 2, 5, 12, Springer.

Nous souhaitons reformuler géométriquement la construction $\sigma \mapsto f'_\sigma$ du cours précédent afin de montrer l'invariance de f'_σ par $GL_n(F)$.

Pour σ, on peut déjà noter qu'elle peut être vue comme une représentation

$$\sigma : \pi_1(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(point base} \\ \text{fixé et sous-entendu)}}}{X}) \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

puisque σ est supposée non ramifiée partout et

$$\pi_1(X) = Gal_F^{nr}.$$

En fait, on peut aller encore plus loin, comme on le verra ci-dessous. Pour f'_σ, c'est a priori nettement plus mystérieux. La reformulation nécessite le "dictionnaire faisceaux-fonctions."

Faisceaux ℓ-adiques

<u>Déf</u> : • Un faisceau étale $\mathcal{F}$ sur un schéma Y (toujours supposé noethérien) est dit <u>loclt constant</u> s'il existe un recouvrement étale (U_i) de Y tq $\mathcal{F}|U_i$ est constant. On dit qu'il est fini <u>loclt constant</u> si de plus les $\mathcal{F}(U_i)$ sont finis.

• Un faisceau étale $\mathcal{F}$ sur un schéma Y est dit <u>constructible</u> si Y peut être écrit comme réunion finie de sous-schémas localement fermés Y_i t.q. $\forall i$, $\mathcal{F}|Y_i$ est fini loclt constant.

<u>Eq</u> : Si $U \to Y$ étale, le faisceau étale sur Y représenté par U est constructible.

<u>Rq</u> : (recollement) $U \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ ouvert, $Z \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ complémentaire fermé. Alors :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{faisceaux étales}\\ \text{sur } Y\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \phi : \mathcal{H} \to i^* j_* \mathcal{G}) \\ \mathcal{G} \text{ faisceau étale sur } U \\ \mathcal{H} \quad \text{——} \quad Z\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{F} \mapsto (j^*\mathcal{F}, i^*\mathcal{F}, i^*(\text{adjonction}) : i^*\mathcal{F} \to i^* j_* j^* \mathcal{F})$$

est une équivalence.

Si Λ est un anneau noethérien (e.g. $\Lambda = \mathbb{Z}$), on peut définir de façon semblable ce notion de faisceau étale de Λ-modules (fini) local^t constant / constructible, en remplaçant "fini" par "Λ-module de t.f."!

Une caractérisation plus abstraite de la catégorie des faisceaux constructibles est la suivante, dans le cas des faisceaux abéliens:

<u>Prop</u>: Les faisceaux abéliens constructibles sont les objets noethériens de la catégorie des faisceaux abéliens de torsion sur le site étale. En particulier, ils en forment une sous-catégorie abélienne.

Tout faisceau fini local^t constant est représentable par un revêtement étale de Y (par descente et le fait qu'il l'est par définition localement sur $Y_{\acute{e}t}$).

Par conséquent, si Y est connexe et $\bar{\eta}$ en est un point géométrique, le foncteur

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_{\bar{y}}$$

est une équivalence de la catégorie des faisceaux abéliens finis local^t constants sur Y sur la catégorie des $\pi_1(Y, \bar{y})$-modules finis continus.

La cohomologie étale d'un faisceau constant de torsion première aux caractéristiques résiduelles de Y se comporte bien (Grothendieck, Artin).
(Par exemple, se comporte comme la coh. singulière sur $\mathbb{C}$)

Soit Λ anneau noethérien, tué par n premier aux caractéristiques résiduelles de Y.

<u>Déf</u>: On définit $D^b_c(Y, \Lambda)$ comme la sous-catégorie pleine de $D^b(Y_{et}, \Lambda)$ formée des complexes à cohomologie constructible. C'est une sous-catégorie triangulée (car les faisceaux constructibles de Λ-modules forment une sous-catégorie de Serre).

On dispose sur cette catégorie d'un formalisme des six foncteurs : si $f : Y \to Y'$ est un morphisme on a les foncteurs :

- $Rf_* : D^b_c(Y, \Lambda) \to D^b_c(Y', \Lambda)$
- $f^* : D^b_c(Y', \Lambda) \to D^b_c(Y, \Lambda)$ (adjoint à gauche de f_*)
- $Rf_! : D^b_c(Y, \Lambda) \to D^b_c(Y', \Lambda)$
- $f^! : D^b_c(Y', \Lambda) \to D^b_c(Y, \Lambda)$ (adjoint à droite de $f_!$)

adjonction partielle usuelle
- $R\underline{Hom}(-,-) : D^b_c(Y, \Lambda)^{op} \times D^b_c(Y, \Lambda) \to D^b_c(Y, \Lambda)$
- $- \otimes^{\mathbb{L}} - : D^b_c(Y, \Lambda) \times D^b_c(Y, \Lambda) \to D^b_c(Y, \Lambda)$.

+ compatibilités (changement de base propre, formule de projection, etc.).

La situation est toutefois bien différente lorsque le groupe abélien considéré est sans torsion.

Par exemple, soit V un $\mathbb{Q}$-e.v. Soit Y normal (noethérien) irréductible, de point générique $j : \eta \hookrightarrow Y$.
Pour tout $Z \to Y$ étale $+ qc$, Z est aussi normal noethérien donc ses composantes connexes sont irréductibles et ont un unique point au-dessus de η. On en déduit que la flèche naturelle $V_X \to j_* V_\eta$ est un isomorphisme. Considérons la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{pq} = H^p(Y, \underbrace{R^q j_* V_\eta}_{\text{faisceautisation étale de } U \to H^q(U_\eta, V)}) \Rightarrow H^{p+q}(\eta, V_\eta)$$

U_η : ens. fini de points donc coh. galoisienne

$\Rightarrow R^q j_* V_\eta = 0$ $\forall q > 0$ car V sans-torsion

Donc $H^p(Y, V_X) = H^p(\eta, V_\eta)$ qui s'annule pour $p > 0$ pour les mêmes raisons.

Toutefois, si l'on considère le cas du groupe $\mathbb{Z}_\ell$, $\ell \neq$ caractéristique, $\varprojlim_n H^*(Y, \mathbb{Z}/\ell^n)$ se comporte raisonnablement puisque c'est le cas des $H^*(Y, \mathbb{Z}/\ell^n)$ et comme $\mathbb{Z}_\ell \simeq \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n$, on a envie d'appeler cette limite $H^*(Y, \mathbb{Z}_\ell)$ (même si ce n'est pas la cohomologie de $\mathbb{Z}_{\ell, Y}$!).

Au niveau des faisceaux, on posera donc

$$D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \left(\varprojlim_n D^b_c(X, \mathbb{Z}/\ell^n)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell .$$

Donner un sens au membre de droite et vérifier que l'on dispose encore pour la catégorie ainsi définie d'un formalisme des six foncteurs présente toutefois des difficultés techniques considérables (Deligne, Ekedahl, simplifié récemment par l'introduction par Bhatt-Scholze de la topologie pro-étale).

→ Dans ce cours on ignorera systématiquement ces subtilités et on fera toujours comme si $D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ était définie comme $D^b_c(X, \Lambda)$, Λ torsion.

Ex : k corps, $\ell \neq \mathrm{car}(k)$.

$$D^b_c(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = D^b(\text{représentations continues } \mathrm{Gal}_k \to GL(V),\ V \ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-ev de dim finie})$$

topologie colimite des top naturelles sur les ext. finies de $\mathbb{Q}_\ell$.

Dictionnaire faisceaux-fonctions

Ce "dictionnaire" (qui n'en est pas vraiment un, puisqu'il ne fonctionne vraiment que dans un sens) repose sur une idée simple :

Soit ℓ premier, X schéma séparé de t.f sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$. Soit $\mathcal{F} \in D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Pour tout corps fini k, et tout $x \in X(k)$, que l'on voit comme un morphisme

$$h_x : \mathrm{Spec}(k) \to X,$$

$h_x^*(\mathcal{F}) \in D^b_c(\mathrm{Spec}(k), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, donc les $\mathcal{H}^i(h_x^*(\mathcal{F}))$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentat° continues de dim finie de $\underbrace{\mathrm{Gal}_k}_{\simeq \langle \mathrm{Frob}_x \rangle}$

Frobenius géométrique

On note

$$\mathrm{tr}_\mathcal{F}(x) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x, \mathcal{H}^i(h_x^* \mathcal{F}))$$

(somme finie)

Ainsi à $\mathcal{F} \in D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et à k corps, on a associé

$$tr_{\mathcal{F}} : X(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell ,$$

i.e. une fonction sur les k-points de X à un faisceau (ou même complexe de faisceaux) constructible sur X.

<u>Ex</u>: $k = \mathbb{F}_q$ corps fini de car p, $\ell \neq p$,

$\psi : k \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ caractère additif.

L'application $\begin{array}{c} \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k \\ x \mapsto x^q - x \end{array}$ est un revêtement étale galoisien de groupe $\mathbb{A}^1(k) \simeq k$.

Par conséquent, k est un quotient de $\pi_1(\mathbb{A}^1_k)$ (qui est donc loin d'être simplement connexe en car p !), et donc ψ donne naissance à un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local $\mathcal{L}_\psi$ de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_k$.

Soit $x \in \mathbb{A}^1_k(k) \simeq k$. Frob_x est $y \mapsto y^{q}$, mais dans la fibre de l'application d'Artin-Schreier en x, on a $y^q = y + x$, i.e. Frob_x agit comme la translation par $-x$. Donc

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{L}_\psi} = \psi^{-1}.$$

L'application $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{tr}_{\mathcal{F}}$ a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{tr}_{\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{F}} + \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}$,
- $\mathrm{tr}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{F}} \cdot \mathrm{tr}_{\mathcal{G}}$,
- $\mathrm{tr}_{f^*\mathcal{F}} = f_k^* \mathrm{tr}_{\mathcal{F}}$ si $f : X \to Y$, $\mathcal{F} \in D^b_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

et pour $h : Y(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $f_k^* h = h \circ f_k$.

($f_k : X(k) \to Y(k)$ induite par f)

- $\mathrm{tr}_{Rf_!\mathcal{F}} = f_{k,!} \mathrm{tr}_{\mathcal{F}}$ si $f : X \to Y$, $\mathcal{F} \in D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

et pour $h : X(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$,

$$f_{k,!} h(y) = \sum_{x \in f_k^{-1}(y)} h(x)$$

("intégration sur les fibres")

Les trois premières propriétés sont faciles.
La dernière repose sur un théorème difficile :

<u>Th</u> (formule des traces de Grothendieck - Lefschetz) :
X schéma séparé de t.f. sur $\mathbb{F}_p$, k extension finie de $\mathbb{F}_p$. Alors

$$\sum_{x \in X(k)} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x, \mathcal{F}_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_k, H^i_c(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})).$$

Fibrés vectoriels et faisceaux cohérents sur les courbes

k corps (fini dans le cas qui nous intéresse), X courbe projective lisse géom. irréductible sur k, $F = k(X)$.

Rappelons pour commencer :

<u>Def</u> : Un <u>fibré vectoriel géométrique</u> de rang $r \geq 1$ sur un schéma Y est un schéma $V \xrightarrow{p} Y$, t.q. $\exists$ recouvrement Zariski $(U_i)_i$ de Y et des isomorphismes $\alpha_i : V \times_Y U_i \simeq \mathbb{A}^r_{U_i}$ tq pour tous i,j et tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de $U_i \cap U_j$, $\alpha_i \circ \alpha_j^{-1}$ est linéaire, i.e. sur les sections globales, $\alpha_i \circ \alpha_j^{-1}$ est de la forme

$$R[T_1, \dots, T_r] \xrightarrow{\sim} R[T_1, \dots, T_r]$$
$$T_\ell \mapsto \sum_k c_{k,\ell} T_k$$

avec $(c_{k,\ell}) \in GL_r(R)$.

Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel ($= \mathcal{O}_Y$-module localt libre de rang fini) sur Y, notons :

$$\mathbb{V}(\mathcal{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}^\vee)).$$

On a pour tout schéma $S \xrightarrow{f} Y$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_Y(S, \mathbb{V}(\mathcal{E})) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}^\vee), f_*\mathcal{O}_S) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}^\vee, f_*\mathcal{O}_S) \\ &= ((f^*\mathcal{E}^\vee)^\vee | S) = f^*\mathcal{E}(S).\end{aligned}$$

Prop : Le foncteur covariant $\mathcal{E} \mapsto \mathbb{V}(\mathcal{E})$ est une équivalence de catégories entre fibrés vectoriels de rang r et fibrés vectoriels géométriques de rang r.

(foncteur inverse : prendre les sections.)

Pour notre courbe X, on utilisera souvent le fait suivant :

Prop : Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel ssi $\mathcal{E}$ est sans torsion.

(En effet, les anneaux locaux de X sont des anneaux de valuation discrète ou des corps.)

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, il est dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E}^{torr} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{libre} \to 0$$

sous $\mathcal{O}_X$-module de torsion maximal. supporté en un nombre fini de pts fermés de X

quotient, sans torsion donc fibré vectoriel.

Notation : $\mathrm{Bun}(X) \subseteq \mathrm{Coh}(X)$ catégories de fibrés vectoriels / faisceaux cohérents sur X.

<u>Def</u> : Si $\mathcal{E} \in \mathrm{Bun}(X)$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ un sous $\mathcal{O}_X$-module, $\mathcal{E}'$ est dit être un <u>sous-fibré</u> de $\mathcal{E}$ si le quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ est un fibré vectoriel.

(Notons que $\mathcal{E}'$ est un fibré car contenu dans $\mathcal{E}$, donc sans torsion.)

En général, si $\mathcal{E}'$ est un sous $\mathcal{O}_X$-module d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$, on peut en faire un sous-fibré par le procédé suivant, dit de saturation :

<u>Def</u> : On note $(\mathcal{E}')^{\#} \subseteq \mathcal{E}$ et on appelle <u>saturation de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$</u> le noyau de $\mathcal{E} \to (\mathcal{E}/\mathcal{E}')^{torr}$.

On a : $\quad \mathcal{E}' \subseteq (\mathcal{E}')^{\#} \subseteq \mathcal{E}$.

Rq : Les sous-fibrés d'un fibré $\mathcal{E}$ sont en correspondance bijective avec les sous F-espaces vectoriels de $\mathcal{E}_\eta$: dans un sens il suffit de prendre la fibre au point générique, dans l'autre, si $V \subseteq \mathcal{E}_\eta$ de poser

$$\mathcal{E}' = \ker\left(\mathcal{E} \to i_{\eta,*}(\mathcal{E}_\eta / V)\right)$$

avec $i_\eta : \eta \to X$. Sous-fibré, car quotient se plonge dans $i_{\eta *}(\mathcal{E}_\eta / V)$ qui est sans-torsion.

Rq : La catégorie $\mathrm{Coh}(X)$ est abélienne, mais pas la catégorie $\mathrm{Bun}(X)$. Toutefois c'est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux. Il faut toutefois prendre garde que ces derniers ne sont pas les mêmes que ceux calculés dans $\mathrm{Coh}(X)$. Explicitement, pour $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Bun}(X)$:

- $\ker(f)$ dans $\mathrm{Coh}(X)$ est un sous-fibré, donc le noyau dans $\mathrm{Bun}(X)$.
- $\mathrm{coker}(f)^{\mathrm{libre}}$ est le conoyau de f dans $\mathrm{Bun}(X)$.

Partant d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X, il existe un procédé simple pour en construire de nouveaux.

__Def__ : Soit $x \in |X|$. Une __modification__ de $\mathcal{E}$ en x est un fibré vectoriel $\mathcal{E}'$ sur X __avec__ $\mathcal{E}_{|X \setminus x} \simeq \mathcal{E}'_{|X \setminus x}$.

Les modifications de $\mathcal{E}$ en x sont en bijection naturelle avec les $\mathcal{O}_x$-réseaux dans $\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x$.
(rappel : $\mathcal{O}_x = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $F_x = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_x)$).

__Cor__ : On a une bijection naturelle :
$$\mathrm{Bun}_n(\mathbb{P}^1_k) \simeq GL_n(k[T]) \backslash GL_n(k((T^{-1}))) / GL_n(k[[T^{-1}]]).$$

__Dem__ : Si $\mathcal{E}$ est un fibré de rang n sur $\mathbb{P}^1_k$, $\mathcal{E}_{|\mathbb{A}^1_k}$ est trivial ($k[T]$ est principal). Fixons $\alpha : \mathcal{E}_{|\mathbb{A}^1_k} \simeq \mathcal{O}^n_{\mathbb{A}^1_k}$. $\mathcal{E}$ est alors une modification de $\mathcal{O}^n_{\mathbb{P}^1_k}$ en $x = \infty$, donc donné par un réseau dans $F_\infty = k((T^{-1}))$, i.e. un élément de $GL_n(k((T^{-1}))) / GL_n(k[[T^{-1}]])$

Oublier α revient à quotienter à gauche par $GL_n(k[T])$ (automorphismes de $\mathcal{O}^n_{\mathbb{A}^1_k}$). ∎

Poussons un peu plus loin l'argument du corollaire.

<u>Th</u> (Weil) : Soit $n \geq 1$. On a une bijection naturelle :

$$\mathrm{Bun}_n(X) \simeq GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_{x \in |X|} GL_n(\mathcal{O}_x).$$

<u>Dém</u> : Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur X. Fixons une trivialisation $\alpha_\eta : \mathcal{E}_\eta \simeq F^n$ de $\mathcal{E}$ au point générique et pour tout $x \in |X|$, une trivialisation $\hat{\mathcal{E}}_x = \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_x \simeq \mathcal{O}_x^n$ ($\mathcal{O}_x$ est local). Pour tout $x \in |X|$, la composée

$$F_x^n = F^n \otimes_F F_x \underset{\alpha_\eta^{-1} \otimes_F F_x}{\simeq} \mathcal{E}_\eta \otimes_F F_x \simeq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} F_x \simeq \hat{\mathcal{E}}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x \underset{\alpha_x \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x}{\simeq} \mathcal{O}_x^n \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x \simeq F_x^n$$

est un élément de $GL_n(F_x)$ qui est dans $GL_n(\mathcal{O}_x)$ pour presque tout x (car α_η n'a qu'un nombre fini de "zéros et pôles"). On obtient ainsi un élément de $GL_n(\mathbb{A}_F)$. Si l'on remplace α_η par une autre trivialisation générique α'_η, cela revient à précomposer cet élément par $\alpha_\eta \circ \alpha'^{-1}_\eta$, i.e. à multiplier par un élément de $GL_n(F)$. Même observation à droite si l'on change les trivialisations aux points fermés. On attache ainsi à $\mathcal{E}$

un élément du double quotient

$$GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A}_F)/\prod_{x\in|X|} GL_n(\mathcal{O}_x).$$

Réciproquement, soit $(a_x)_x$ une classe de ce double quotient. On lui associe le sous-faisceau $\mathcal{E}$ de $i_* F^n$ défini par $\mathcal{E}(U) = \{ s\in F^n, \forall x \in U, s \in a_x \mathcal{O}_x^n \}$ pour tout ouvert U de X. ∎

Vu ce théorème, et le dictionnaire faisceaux-fonctions expliqué plus haut, il est tentant pour géométriser les formes automorphes non ramifiées pour GL_n de chercher à fabriquer un schéma "$\mathrm{Bun}_{X,n}$" tel que

$$\text{"}\mathrm{Bun}_{X,n}\text{"}(k) \simeq \mathrm{Bun}_n(X).$$

C'est (presque) ce que nous ferons au cours suivant.