Cours 6

Champs algébriques, champ des fibrés et des faisceaux cohérents sur une courbe

Références :

- Heinloth, "Lectures on the moduli stack of vector bundles on a curve", in Affine Flag Manifolds and Principal bundles, Lect I & II, Birkhäuser.
- Laumon - Moret-Bailly, Champs algébriques, §1-4, Springer.
- Nitsure, Construction of Hilbert and Quot Schemes.

Soit X courbe projective lisse géom. connexe sur k. Soit $n \geq 1$. Pour construire un schéma "Bun_n" (X sous-entendu) sur $\mathrm{Spec}(k)$ tel que

$$\text{"}\mathrm{Bun}_n\text{"}(k) = \mathrm{Bun}_n(X),$$

on serait tenté de considérer le foncteur

$$\mathrm{Bun}_n^{\text{naif}} : k\text{-schémas} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$S \longmapsto \text{classes d'iso de fibrés de rang } n \text{ sur } X_S := X \times_k S.$$

et de montrer qu'il est représentable.

Malheureusement, pour les mêmes raisons que celles vues dans le cours 2, lorsque $n = 1$ (le cas du groupe de Picard), ce foncteur ne définit même pas un faisceau.

Le problème est que les objets que l'on paramètre ont des automorphismes. Un fibré $\mathcal{E}$ de rang n sur X_S et son tordu par le tiré en arrière d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur S sont localement isomorphes (car localement $\mathcal{L}$ est trivial), mais ces isomorphismes locaux ne se recollent pas nécessairement en un isomorphisme global, car $H^1(S, \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{E}))$ peut être non nul.

Ce problème peut se résoudre de deux façons :

- imposer des conditions supplémentaires sur les objets paramétrés pour "rigidifier" la situation (par exemple, dans le cas des fibrés, des conditions de stabilité).

- ne pas passer aux classes d'isomorphisme, il se souvenir que les objets ont des isomorphismes. Il faut donc ne plus travailler avec des faisceaux d'ensembles, mais des faisceaux à valeurs dans des catégories.

C'est la deuxième solution que l'on va retenir ici, et qui mène à la théorie générale des <u>champs</u> (cf. cours de F. Loeser ce semestre).

<u>Déf</u> : Un <u>groupoïde</u> est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

<u>Ex</u> : . X ensemble $\rightsquigarrow$ groupoïde avec pour objets les éléments de X et pour seuls morphismes id_x, $x \in X$.

"setoïde" . G groupe, BG = catégorie avec un seul objet e, et $Aut(e) = G$.

Les groupoïdes forment naturellement une 2-catégorie Gpd, avec pour 1-morphismes les foncteurs et 2-morphismes les transformations naturelles.

Fixons un schéma de base S_0, supposé noethérien.
Fixons une topologie de Grothendieck τ sur la catégorie des S_0-schémas. On prendra toujours $\tau \in \{Zar, \text{étale}, fppf\}$ (fidèlement plat de présentation finie). Si (U_i) est un τ-recouvrement d'un S_0-schéma S, on note $U_i \cap U_j$ pour $U_i \times_S U_j$.

__Déf__ : Un τ-__champ__ sur S_0 est un faisceau

$$\mathcal{M} : S_0\text{-schémas} \to \mathrm{Gpd}$$

c'est-à-dire la donnée :

- pour tout S_0-schéma S d'un groupoïde $\mathcal{M}(S)$,
- pour tout morphisme $f : S' \to S$, d'un foncteur $f^* : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S')$,
- pour toute paire de morphismes $S \xrightarrow{f} S' \xrightarrow{g} S''$, d'une transformation naturelle $\phi_{f,g} : f^* \circ g^* \Rightarrow (g \circ f)^*$, de façon associative pour la composition;

telles que :

- (Recollement des objets) Pour tous τ-recouvrement (U_i) de S, objets $\mathcal{E}_i \in \mathcal{M}(U_i)$ et isomorphismes $\alpha_{i,j} : \mathcal{E}_i|_{U_i \cap U_j} \simeq \mathcal{E}_j|_{U_i \cap U_j}$ satisfaisant la condition de cocycle usuelle, il existe un objet $\mathcal{E} \in \mathcal{M}(S)$ unique à isomorphisme près et des isomorphismes $\beta_i : \mathcal{E}_{|U_i} \simeq \mathcal{E}_i$ t.q. $\alpha_{i,j} = \beta_j \circ \beta_i^{-1}|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i,j$.
- (Recollement des morphismes) Étant donné un τ-recouvrement (U_i) de S, des objets $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{M}(S)$ et des morphismes $f_i : \mathcal{E}|_{U_i} \to \mathcal{F}|_{U_i}$ t.q. $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i,j$, $\exists!$ morphisme $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ t.q. $f|_{U_i} = f_i$ $\forall i$.

<u>Rq</u> : En fait la définition ci-dessus est imprécise, car il faut spécifier des conditions additionnelles sur les $\phi_{f,g}$. De plus dans la pratique, définir les pullbacks fonctoriellement n'est pas toujours évident. C'est pourquoi on utilise en général la notion (moins intuitive) de <u>catégorie fibrée en groupoïdes</u>, cf. le cours de F. Loeser.

Les champs forment naturellement une 2-catégorie Champs. (1-morphismes : $\forall$ S_0-schéma S, foncteur $F_S : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{N}(S)$ + $\forall f : S \to S'$ transformation naturelle $F_f : F_S \circ f^* \Rightarrow f^* \circ F_{S'}$ satisfaisant contrainte d'associativité. 2-morphismes : transformation naturelle entre tels foncteurs, compatible aux pullbacks.) À partir de maintenant, $\underline{\tau = \text{fppf}}$.

Exemples :

1) Soit Y un S_0-schéma. Le foncteur $\underline{Y} : S \mapsto \underset{\text{setoïde}}{\mathrm{Hom}(S,X)}$ est un champ (pullback f^* = composition avec f).

Lemme (lemme de Yoneda pour les champs)
Soit $\mathcal{M}$ un champ sur S_0. Alors pour tout k-schéma Y, on a une équivalence de catégories naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\text{Champs}}(\underline{Y}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}(Y).$$

Dém : Flèche naturelle : si $F \in \mathrm{Hom}_{\text{Champs}}(\underline{Y}, \mathcal{M})$, $F(\mathrm{id}_Y) \in \mathcal{M}(Y)$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{M}(Y)$, on peut définir $F_x : \underline{Y} \to \mathcal{M}$, $f \in \underline{Y}(S) = \mathrm{Hom}(S, Y) \mapsto \underset{\in \mathcal{M}(S)}{f^* x}$.

Compositions : $x \mapsto F_x \mapsto F_x(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}^* x = x$.

$F \mapsto F(id_Y) \mapsto F_{F(id_Y)}$:
$F_{F(id_Y)}(f : S \to Y) = f^* F(id_Y)$. Mais alors
$F_f : F(f : S \to T) \to f^*(F(id_Y))$ donne un isomorphisme. ∎

Dans la suite on notera simplement Y au lieu de $\underline{Y}$.

2) Le foncteur Bun_n : k-schémas $\to$ Gpd
($S_0 = \mathrm{Spec}(k)$, X comme avant) $\quad S \mapsto$ groupoïde des fibrés vect. de rg n sur X_S

est un champ. Cela découle de la descente fidèlement plate pour les faisceaux quasicohérents et du fait que pour un module être de présentation finie, resp. plat, peut se tester localement pour la topologie fppf (rappelons aussi que plat + présentation finie $\Longleftrightarrow$ fini localᵗ libre).

Pour les mêmes raisons,
Coh : k-schémas $\to$ Gpd
$S \mapsto$ groupoïde des faisceaux cohérents sur X_S plats sur S.

est un champ.

De même qu'un faisceau arbitraire n'a pas de structure géométrique utilisable, un champ arbitraire n'est pas un objet très géométrique. Commençons par un exemple:

<u>Ex</u> : G groupe algébrique sur S_0.

Considérons $BG : S_0\text{-schémas} \to \mathrm{Gpd}$

$$S \mapsto \text{groupoïde des } G\text{-torseurs sur } S.$$

C'est un champ.

Soit $\mathcal{E}$ un G-torseur sur un k-schéma S. Alors $\mathcal{E}$ définit un morphisme $f_{\mathcal{E}} : S \to BG$. De même le G-torseur trivial sur S_0 définit $\mathrm{triv} : S_0 \to BG$.

Calculons le produit fibré de

$$\begin{tikzcd} & S_0 \arrow[d, "\mathrm{triv}"] \\ S \arrow[r, "f_{\mathcal{E}}"] & BG \end{tikzcd}$$

Pour tout S_0-schéma T, on a:

$$(S \times_{BG} S_0)(T) = \left\{ (g, \alpha),\ \begin{array}{l} g : T \to S \\ \alpha : g^*\mathcal{E} \simeq p^*(\text{trivial}) \\ \qquad = T \times G \end{array} \right\}$$

(ici : $p : T \to S_0$)

$$= \left\{ (g, s),\ \begin{array}{l} g : T \to S \\ s \text{ section de } g^*\mathcal{E} \end{array} \right\}$$

$$= \mathcal{E}(T).$$

Donc ce produit fibré est un faisceau d'ensembles.

De ceci on déduit que $S_0 \xrightarrow{\text{triv}} BG$ est le G-torseur universel sur BG et que $S_0 \xrightarrow{\text{triv}} BG$ est une surjection après tout changement de base, lisse si G est lisse.

<u>Déf</u> : Un champ $\mathcal{M}$ sur S_0 est dit <u>algébrique</u> si :

i) $\forall S \to \mathcal{M}$, $S' \to \mathcal{M}$, $S \times_{\mathcal{M}} S'$ est représentable.

ii) $\exists$ S_0-schéma U et $u : U \to \mathcal{M}$ t.q. $\forall$ S_0-schéma S, avec $S \to \mathcal{M}$, la projection $U \times_{\mathcal{M}} S \to S$ est une surjection lisse.

<u>Rq</u> : 1) La condition i) se reformule en disant que $\Delta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times_{S_0} \mathcal{M}$ est représentable ou encore que pour tout S_0-schéma S et tous $x, y \in \mathcal{M}(S)$, le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}(x,y)$ est un schéma sur S. (exercice)

2) Pourquoi lisse dans ii) ? En fait, Artin a montré que plat localement de présentation finie, condition a priori plus faible, donne lieu à la même notion de champ algébrique.

Exemples :

1) (Champs classifiants)

Soit G groupe algébrique lisse sur S_0. Le champ BG sur S_0 est un champ algébrique. En fait par la Rq 2) ci-dessus, G plat de présentation finie suffit !

2) (Schémas Quot)

Soit $Y \to S_0$ schéma projectif. Soit $\mathcal{F}$ cohérent sur Y et plat sur S_0. Soit

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/Y/S_0} : \begin{array}{l} S_0\text{-schémas} \to \mathrm{Ens} \\ S \mapsto \text{classes d'iso de quotients } \mathcal{F}_S \twoheadrightarrow \mathcal{G} \text{ plats sur } S. \end{array}$$

Th (Grothendieck) $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/Y/S_0}$ est une somme disjointe de schémas projectifs.

Avant de dire un mot de la preuve, énonçons un résultat qui donne des reformulations de la condition de platitude dans la définition du problème de modules.

Soit $f : Y \to S_0$ projectif comme dans le théorème,

$\mathcal{O}(1)$ un fibré f-ample sur Y (i.e. $\forall s \in S$, $\mathcal{O}_{Y_s}(1)$ est ample sur Y_s).

<u>Prop</u> : Soit $\mathcal{F}$ cohérent sur Y. S'équivalent :

i) $\mathcal{F}$ est S-plat.

ii) $\forall m \gg 0$, $f_* \mathcal{F}(m)$ est un fibré.

iii) le polynôme de Hilbert $S \ni s \mapsto P(\mathcal{F}_s)$ est une fonction local^t constante de s.

<u>Dém</u> : Cf. Hartshorne, III.9.9. ∎

Cet énoncé a pour nous la conséquence suivante : le foncteur $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/Y/S_0}$ se décompose comme union disjointe de sous-champs ouverts $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/Y/S_0}$, P polynôme, des quotients S_0-plats de $\mathcal{F}$ à polynôme de Hilbert P.

Il suffit donc de montrer le

<u>Th'</u> : Soit $f : Y \to S_0$, $\mathcal{F}$ comme avant et $P \in \mathbb{Q}[X]$. Le foncteur $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/Y/S_0}$ est représentable par un S_0-schéma projectif.

La proposition ci-dessus suggère aussi une stratégie de preuve : quitte à tordre par une grande puissance du fibré ample, elle nous dit que pour un quotient plat $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}_S$ donné, $f_{S*}\mathcal{F}_S$ et $f_{S*}\mathcal{G}$ sont des fibrés que l'on peut supposer de rang constant : autrement dit, on va pouvoir se ramener au cas $Y = S_0$, i.e. au cas des grassmanniennes dont la représentabilité est facile. C'est cette stratégie qui est implémentée dans la démonstration de Grothendieck.

<u>Dém</u> (esquisse) : En plongeant $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{S_0}$ et en choisissant $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{S_0}}(r)^d \to i_*\mathcal{F}$ surjective, on voit que

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/Y/S_0} \to \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}(r)^d/\mathbb{P}^N_{S_0}/S_0} \text{ est une}$$

immersion fermée.

Donc on peut supposer $Y = \mathbb{P}^N_{S_0}$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{S_0}}(r)^d$.

Soit S S_0-schéma, $\mathcal{F}_S \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ un S-point de $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/Y/S_0}$.

On a donc une suite exacte :

$$0 \to K \to \mathcal{F}_S \to \mathcal{G} \to 0 \quad \text{sur } Y.$$

Comme les polynômes de Hilbert sont fixés constants, il existe $m \gg 0$ t.q. si $\ \ {}_S : Y_S \to S$, $A \in \{K, \mathcal{F}_S, \mathcal{G}\}$,

• $R^i f_{S*}(\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{A}) = 0 \ \forall i > 0$. $\Rightarrow f_{S*}(\mathcal{A})$ fibré

• $f_S^* f_{S*} \mathcal{A}(m) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(m)$.

(critère dit de Castelnuovo-Mumford)

On en déduit que $\mathcal{F}_S(m) \to \mathcal{G}(m)$ est déterminée par $f_{S*}\mathcal{F}_S(m) \to f_{S*}\mathcal{G}(m)$, qui est un point d'une grassmannienne. De plus la flèche ainsi définie est une immersion localement fermée : si

$$0 \to K' \to f_{S*}\mathcal{F}_S(m) \to \mathcal{G}' \to 0$$

est la suite exacte universelle sur la grassmannienne, alors la composée $f_S^* K'(-m) \to f_S^* f_{S*} \mathcal{F}_S \to \mathcal{F}_S$ définit un S-point de $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{F}/Y/S_0}$ si son conoyau est S-plat et a polynôme de Hilbert P.

Ensuite une application du critère valuatif de propreté donne la projectivité. ■

3) (Champs des fibrés et faisceaux cohérents).

$\underline{\text{Th}}$: Soit $X \to \operatorname{Spec} k$ courbe projective lisse géom irréductible. Les champs $\mathcal{C}oh$ et $\mathcal{B}un_n$ $(n \geq 1)$ sont des champs algébriques.

$\underline{\text{Dém}}$: Notons tout d'abord que pour tout n, $\mathcal{B}un_n \to \mathcal{C}oh$ est une immersion ouverte. Donc il va suffire de montrer le résultat pour $\mathcal{C}oh$. Vérifions les points i) et ii) de la définition :

i) : Il faut voir que $\forall$ k-schéma S, $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(S)$,

$\underline{\operatorname{Isom}}_S(\mathcal{F}, \mathcal{E}) : T_{/S} \mapsto \operatorname{Isom}_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{F}_T, \mathcal{E}_T)$ est un S-schéma. On se ramène par passage à la limite au cas S de t.f sur k, donc noethérien.

$\underline{\text{Lemme}}$: S noethérien, $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ faisceaux cohérents sur $\pi : Y \to S$ schéma projectif. Le foncteur $\underline{\operatorname{Hom}}_S(\mathcal{H}, \mathcal{G})$:

$$T_{/S} \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_T}}(\mathcal{H}_T, \mathcal{G}_T) \text{ est}$$

représentable par un fibré vectoriel géométrique si $\mathcal{G}$ est plat sur S.

$\underline{\text{Dém}}$: Voir EGA III 7.7.8, 7.7.9. $\blacksquare$

Du lemme on déduit que $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{F},\mathcal{G})$, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{F},\mathcal{F})$, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{G},\mathcal{G})$ et donc aussi

$$Z_{\mathcal{F},\mathcal{G}} := \left\{ (a,b) \in \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{F},\mathcal{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{G},\mathcal{F}),\ \begin{array}{l} b\circ a = id_{\mathcal{F}} \\ a\circ b = id_{\mathcal{G}} \end{array} \right\}$$

sont des schémas affines de t.f. Pour conclure, on observe que $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\mathcal{F},\mathcal{G})$ est la fibre de

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{immersion ouverte}}}{Z_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{F},\mathcal{G})}, \quad (a,b) \mapsto a.$$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Isom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ représentable.

ii) On va utiliser les schémas Quot (exemple 2). Définissons

$$\mathrm{Quot}^{\circ}_{\mathcal{O}_X^N/X/k} \subseteq \mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_X^N/X/k}$$

par la condition : $(\mathcal{O}_{X_S}^N \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}_S) \in \mathrm{Quot}^{\circ}_{\mathcal{O}_X^N/X/k}(S)$ ssi $R^i f_{S*}\mathcal{F}_S = 0$ $\forall i>0$, $f_{S*}q : \mathcal{O}_S^N \to f_{S*}\mathcal{F}_S$ isomorphisme. C'est un sous-schéma ouvert : il faut éviter dans S les supports des faisceaux parasites.

On fixe aussi $\mathcal{O}_X(1)$ ample.

Pour tous $N, n \geq 0$, on a un morphisme de champs :

$$P_{N,n} : \mathrm{Quot}^{\circ}_{\mathcal{O}_X^N/X/k} \to \mathcal{C}oh$$

$$(\mathcal{O}_{X_S}^N \xrightarrow{q} \mathcal{F}_S) \mapsto \mathcal{F}_S(-n).$$

donnant naissance à un morphisme de champs

$$P = (P_{N,n})_{N,n\geq 0} : \bigsqcup_{N,n} \mathrm{Quot}^{\circ}_{\mathcal{O}_X^N/X/k} \to \mathcal{C}oh.$$

Montrons que P est surjectif et lisse. Soit S un k-schéma et $\mathcal{F}$ cohérent sur X_S et S-plat. Pour $N, n \geq 0$, $\exists$ plus grand ouvert $U_{N,n}$ de S au-dessus duquel $R^i f_{S*} \mathcal{F}(n)$ s'annule pour $i>0$ et $f_S^* f_{S*} \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(n)$ est surjective et $f_{S*}\mathcal{F}(n)$ est un fibré de rang N. (En effet retirer les supports des $R^i f_{S*} \mathcal{F}(n)$ et de $\mathrm{coker}(f_S^* f_{S*} \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(n))$ pour garantir les deux premières conditions. Alors comme de plus $\mathcal{F}$ est S-plat, $f_{S*}\mathcal{F}(n)$ est loc^t libre, donc on garantit la 3^e condition.)
(Grauert, Hartshorne III.12.9)

La projection $S \times_{\mathrm{Coh}} \mathrm{Quot}^{\circ}_{\mathcal{O}_X^N/X/S} \xrightarrow{p_1} S$ se factorise par $U_{N,n}$ vers S. Sa source est le $GL_{N,U_{N,n}}$-torseur $\underline{\mathrm{Isom}}_{U_{N,n}}\left(\mathcal{O}^N_{U_{N,n}}, f_{U_{N,n},*}\mathcal{F}_{U_{N,n}}(n)\right)$.

Cela montre que $P_{N,n}$, et donc P, est lisse. La surjectivité, elle, découle du théorème de Serre (Hartshorne, III.8.8) ∎

<u>Rq</u>: la preuve donnée s'applique plus généralt si $\mathrm{Spec}(k)$ est remplacé par S_0 noethérien, X par $Y \xrightarrow{f} S_0$ projectif tq $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{S_0}$ universellt.

Cas <u>particulier</u> : $\mathrm{Bun}_1 = \mathcal{P}ic_{X/k}$ est appelé champ de Picard. On a un morphisme de champs

$$\mathcal{P}ic_{X/k} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}_{X/k}$$

obtenu en associant au groupoïde des fibrés l'ensemble des classes d'isomorphismes de ses objets et en faisceautisant.

On a une action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathcal{P}ic_{X/k}$ (car tout fibré en droites a $\mathbb{G}_m$ pour groupe d'automorphismes) et π est $\mathbb{G}_m$-invariante. En fait π est une $\mathbb{G}_m$-gerbe, i.e. localement $\mathcal{P}ic_{X/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{X/k} \times B\mathbb{G}_m$.

En effet, quitte à remplacer k par une extension finie séparable, $X(k) \neq \emptyset$. Soit S un k-schéma, $S \to \mathcal{P}ic_{X/k}$ correspondant à un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur X_S. Si $\sigma : \mathrm{Spec}(k) \to X$ est une section, $\underline{\mathrm{Isom}}_S(\sigma_S^* \mathcal{L}, \mathcal{O}_S)$ est un $\mathbb{G}_m$-torseur S' sur S qui s'envoie vers $\mathrm{Pic}_{X/k}$, puisque le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites avec une trivialisation de leur pullback par σ s'identifie à $\mathrm{Pic}_{X/k}$.

Note : l'application d'Abel-Jacobi se relève à $\mathcal{P}ic_{X/k}$ mais pour le corps de classes géométriques il est important d'utiliser $\mathrm{Pic}_{X/k}$ pour que les fibres en grand degré soient des espaces projectifs (et non des espaces affines épointés).

Le formalisme des faisceaux ℓ-adiques ($\ell \neq p = \mathrm{car}\, k$) s'étend* aux champs algébriques sur k, ainsi que le dictionnaire faisceaux-fonctions. Pour construire

$$f_\sigma : GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_x GL_n(\mathcal{O}_x) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell ,$$

associée à la représentation galoisienne σ, nous allons donc dans la suite de ce cours expliquer (partiellement) la construction de

$$\mathrm{Aut}_\sigma \in D^b_c(\mathrm{Bun}_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

dont f_σ sera la trace de Frobenius, via l'uniformisation de Weil

$$\mathrm{Bun}_n(k) \simeq GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A}_F) / \prod_{x \in |X|} GL_n(\mathcal{O}_x).$$

* Modulo beaucoup de travail....