Cours 8

Compléments sur les faisceaux pervers, théorie de Springer

Références :

- de Cataldo-Migliorini, The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps, §4.2, Bulletin of the AMS.
- Clausen, The Springer correspondence, Senior Thesis.

Soit Y schéma de type fini sur un corps de caractéristique $\neq \ell$.

Nous avons défini la semaine dernière une nouvelle sous-catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de $D^b_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Un avantage de $\mathrm{Perv}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sur $\mathrm{Cons}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (= la catégorie abélienne des faisceaux constructibles) est qu'elle est stable par dualité de Verdier. L'énoncé suivant montre qu'elle a une structure remarquable.

<u>Th</u> : La catégorie $\mathrm{Perv}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est artinienne et noethérienne $\Leftrightarrow$ tout objet a une filtration finie par sous-objets avec gradués successifs des objets simples ($\Leftrightarrow$: exercice). De plus, les objets simples sont en bijection avec les couples $(Z, \mathcal{L})$, où Z est un fermé irréductible de Y et $\mathcal{L}$ représentation irréductible du groupe de Galois de $k(Z)$.

Rq : la catégorie $\mathrm{Cons}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ n'est pas artinienne : prendre $Y = \mathbb{A}^1$, $(y_n)_n$ une suite de points distincts de Y et $j_n : Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\} \hookrightarrow Y$. Les $j_{n,!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ forment une suite décroissante infinie de sous-faisceaux constructibles de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Dém : Voir Beilinson-Bernstein-Deligne, § 4.3.
Donnons simplement ici une idée de la paramétrisation des objets simples. Soit $(Z, \mathcal{L})$ comme dans l'énoncé du théorème. $\mathcal{L}$ peut être vu comme système local sur un ouvert dense U de Z, que l'on peut (quitte à rétrécir un peu U) supposer lisse. Posons :

$$IC(Z, \mathcal{L}) = i_*\left(\mathrm{Im}\left({}^pH^0(j_!\mathcal{L}[\dim U]) \to {}^pH^0(j_*\mathcal{L}[\dim U])\right)\right)$$

avec $j : U \hookrightarrow Z$

$i : Z \hookrightarrow Y$. ${}^pH^0$ = coh. perverse en deg 0.

"complexe d'intersection"

Point remarquable : indépendant de U !

Rq : L'énoncé du théorème est assez remarquable si on compare de nouveau à la situation pour les faisceaux constructibles : si $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, $\forall y \in Y$, $\mathcal{F}$ donne naissance à une représentation de $\mathrm{Gal}_{k(y)}$. Mais il n'est pas facile de dire comment cette collection de représentations galoisiennes s'organise en un faisceau constructible. Pour les faisceaux pervers, on peut carrément étendre une représentation du groupe de Galois du corps résiduel en un point !

Stabilité des faisceaux pervers par les six opérations

On a vu au cours dernier que pour $f : Y' \to Y$ de dim d, $f^*[d]$ envoie $\mathrm{Perv}(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dans $\mathrm{Perv}(Y', \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Le théorème d'Artin-Grothendieck permet aussi de voir que si f est fini (donc affine et propre), f_* envoie $\mathrm{Perv}(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dans $\mathrm{Perv}(Y', \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

En particulier, si Y' est lisse de dim d, f fini, $f_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}[d]$ est pervers.

Plus généralement :

Déf : $f : Y' \to Y$ avec Y' lisse dim d. Le morphisme f est dit <u>semi-petit</u> si f est propre, et s'il existe une stratification $\{Y_t\}$ de Y t.q. $\forall y \in Y_t \cap f(Y')$, $2 \dim f^{-1}(y) + \dim(Y_t) \leq \dim(Y')$ (*)

Ex : Si f est fini, f est semi-petit. Réciproquement, si f est semi-petit, il est génériquement fini : considérer sa restriction à la strate ouverte de chaque composante irréductible de Y et se souvenir que $\forall y$, $\dim f^{-1}(y) \geq \dim(Y') - \dim(Y)$.

Contre-ex : éclatements, en général.

Prop : $f : Y' \to Y$, Y' lisse dim d, f semi-petit. Alors $Rf_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ est pervers.

Dém : Comme f est propre et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ auto-dual (par lissité de Y'), il suffit de montrer que $Rf_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ est dans ${}^p D_c^{b, \leq 0}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Soit $y \in Y$, t t.q. $y \in Y_t$.

$$i_y^* Rf_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[d] = Rf_{y*} i_y'^* \mathbb{Q}_\ell[d] \qquad \left(\begin{array}{l} i'_y : Y'_y \to Y \\ f_y = f|_{Y'_y} \end{array} \right)$$

par chgt de base propre

Mais $i_y'^{*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $Rf_{y*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \in D_c^{[0, 2\dim Y'_y]}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Comme $2\dim Y'_y \leq d - \dim(Y_t)$,

$$i_y^* Rf_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[d] \in D^{\leq -\dim(Y_t)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subseteq D^{\leq -d(y)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell). \blacksquare$$

On voit donc que les morphismes semi-petits sont "fabriqués" pour que la proposition soit vraie.

Rq: Plus généralement, on dira que f est stratifié semipetit s'il existe une stratification $\{Y'_s\}$ de Y' t.q. $\forall s$, $f|Y'_s$ est semi-petit. La proposition ci-dessus s'étend alors en l'énoncé que pour f stratifié semi-petit, l'image directe dérivée par f de tout faisceau pervers et $\{Y'_s\}$-constructible est pervers.

En fait, on peut dire bien mieux sur $Rf_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ si l'on ajoute aux hypothèses de la proposition la condition que f est surjective.

C'est le théorème de décomposition, cas particulier d'un théorème général de Beilinson-Bernstein-Deligne.

Th : $f : Y' \to Y$, Y' lisse de dim d, f semi petit surjectif. Alors

$$Rf_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell [d] = \bigoplus_{\substack{\text{strates } Y_t \\ \text{t.q. égalité dans } (*)}} IC(\bar{Y}_t, \mathcal{L}_t)$$

$\mathcal{L}_t$: système local semi-simple sur Y_t.

En particulier, si seule la strate ouverte vérifie $(*)$, $Rf_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell [d]$ est un complexe d'intersection !

Pour l'instant, les seuls morphismes semipetits que nous avons rencontrés sont les morphismes finis. Dans la suite de ce cours, nous allons discuter d'un exemple non fini et intéressant issu de la théorie des groupes algébriques.

Cet exemple est une illustration frappante et prototypique de l'utilisation des faisceaux pervers en théorie des représentations (dans l'esprit de Langlands géométrique) et un moyen de préparer la voie à une construction plus générale de Lusztig.

Théorie de Springer

Si Γ est un groupe fini, on sait que les classes d'iso de représentations irréductibles (complexes) de Γ et les classes de conjugaison dans Γ sont en bijection (par la théorie des caractères). Mais la bijection n'est pas explicite.

Pour certains groupes finis, on peut toutefois construire une bijection explicite et même de nature géométrique : c'est ce que fait la théorie de Springer. Nous allons l'expliquer dans le cas particulier du groupe symétrique $\Gamma = S_n$, $n \geq 1$. Dans ce qui suit, corps de base $= \mathbb{C}$.

Considérons $G = GL_n$, vu comme groupe algébrique affine (i.e. un objet en groupes dans la catégorie des schémas affines : $GL_n = \{ (A, x) \in \mathbb{A}^{n^2+1}, \ \det(A)x = 1 \}$).

On note $N \subseteq M_n$ $\simeq \mathbb{A}^{n^2}$, le cône nilpotent : sous-variété fermée formée des matrices nilpotentes.

Notons aussi $N \subseteq B$ unipotent / Borel standard dans G

et $\underline{n}$, $\underline{b}$, $\underline{g}$ les algèbres de Lie de N, B, G.

On sait que tout élément de N peut être conjugué (par l'action par conjugaison de G) dans n et que les classes de conjugaison sont en bijection avec les partitions de n, i.e avec les classes de conjugaison (Jordan) dans S_n. On peut donc et va donc tenter d'associer à toute G-orbite dans N une représentation irréductible de S_n.

<u>Ex</u> : (qui n'en est pas tout à fait un)

$G = SL_2$, base de $\underline{g}$ donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

est dans $N \iff \det = 0 \iff z^2 = xy$. Donc

$N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{A}^3, z^2 = xy \}$.

Comme le montre l'exemple précédent, N est en général très singulier. Notons

$\tilde{N} = G \times^B n$.   (ici $b \in B$ agit sur (g, n) par (gb^{-1}, bnb^{-1}))

("résolution de Springer")

C'est l'espace total du fibré G-équivariant sur $\mathcal{F}\ell := G/B$ correspondant à la B-représentation $\mathfrak{n}$ (noter que $G \backslash \mathcal{F}\ell \simeq \cdot/B$).

On a aussi un morphisme G-équivariant.

$p : \tilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$, $(g,u) \mapsto gug^{-1}$.

Prop $\tilde{\mathcal{N}}$ est lisse irréductible de dim $2\dim(\mathfrak{n})$ $= n(n-1)$, et p est semi-petit surjectif pour la stratification de $\mathcal{N}$ donnée par les classes de conjugaison, avec égalité dans (*) pour toute strate.

Dém : On se contentera d'une description alternative de $\tilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$: on a un morphisme $\tilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{F}\ell \times \mathcal{N}$

$$(g,u) \mapsto (gB, gug^{-1})$$

Après changement de base le long de $G \to \mathcal{F}\ell$, devient $(\mathrm{id}_G, \iota) : G \times \mathfrak{n} \to G \times \mathcal{N}$.

C'est donc une immersion fermée, et son image est l'ensemble des couples (gB, u) t.q. $u \in gBg^{-1}$.

Autrement dit $\tilde{\mathcal{N}} = \{(gB,u),\ u \in gBg^{-1}\} \to \mathcal{N}$

$$(gB,u) \mapsto u$$

En particulier p est propre : immersion fermée de $\tilde{N}$ dans $\mathcal{F}l \times N$ puis projection sur le deuxième facteur ($\mathcal{F}l$ propre). Elle est aussi surjective et on voit que $\dim(\tilde{N}) = \dim(\mathfrak{n}) + \dim(\mathcal{F}l) = 2\dim(\mathfrak{n})$ par la première description.

Finalement, il reste à démontrer : $\forall u \in N$,

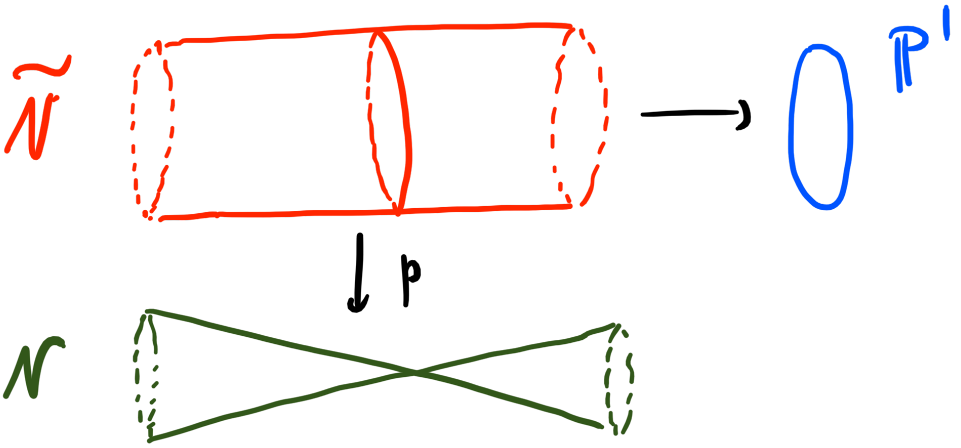
$$2\dim\left(\begin{array}{c}\text{sous-groupes de}\\ \text{Borel contenant } u\end{array}\right) + \dim\left(\begin{array}{c}\text{classe de}\\ \text{conjugaison}\\ \text{de } u\end{array}\right) = 2\dim(\mathfrak{n}).$$

■

<u>Ex</u> (suite) : $G = SL_2$, $\mathcal{F}l = \mathbb{P}^1$

$\tilde{N} \to \mathbb{P}^1$ espace total de $\mathcal{O}(-2)$.

$\tilde{N} \to N$ contracte la section nulle sur 0.



De la proposition et du théorème de décomposition, on déduit :

<u>Cor</u> : Le <u>faisceau de Springer</u> (un complexe...)

$$\mathcal{S} := Rp_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \, [n(n-1)]$$

est un faisceau pervers G-équivariant, qui est somme directe de complexes d'intersection indexée par les classes de conjugaison nilpotentes.

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{\substack{c \text{ classe} \\ \text{de conj nilpotente}}} IC(\bar{c}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes V_c \qquad (*)$$

V_c ← multiplicité : $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-ev de dim finie.

(Ici on a aussi utilisé que les systèmes locaux dont on prend l'extension intermédiaire sont triviaux, ce qui peut se déduire de la G-équivariance.)

On va montrer que $\mathcal{S}$ est muni d'une action du groupe symétrique S_n. Il n'y a toutefois aucune action évidente de S_n sur la résolution de Springer. Pour construire cette action, il va donc nous falloir d'abord étendre la construction de cette résolution.

Def : On note $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \overset{B}{\times} B$.
("résolution de Grothendieck-Springer")

On a un morphisme
$$\bar{p} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \ , \ (g, b) \mapsto gbg^{-1}.$$

Comme précédemment, on peut décrire la fibre de $\bar{p}$ en $g \in \mathfrak{g}$ comme l'ensemble des sous-groupes de Borel contenant g (ou encore : l'ensemble des drapeaux complets stables par g).

Nous admettrons l'énoncé suivant :

Prop : Le morphisme $\bar{p}$ est propre, surjectif et semi-petit relativement à une stratification de $\mathfrak{g}$ dont la strate ouverte est
$$\mathfrak{g}^{rss} = \left\{ g \in \mathfrak{g} \ , \ g \text{ diagonalisable à valeurs propres distinctes} \right\}$$
et dont toutes les autres strates S vérifient :
$\forall g \in S$, $2\dim(\bar{p}^{-1}(g)) + \dim(S) < n^2$.

De plus $\bar{p}_{|\mathfrak{g}^{rss}} : \bar{p}^{-1}(\mathfrak{g}^{rss}) \to \mathfrak{g}^{rss}$ est un revêtement fini étale galoisien de groupe S_n.

<u>Cor</u> : Le complexe $\overline{\mathcal{G}} := R\bar{p}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[n^2] \in D^b_c(\mathfrak{g}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pervers G-équivariant et vérifie :

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathfrak{g}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\overline{\mathcal{G}}) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[S_n].$$

<u>Dém</u> : La proposition précédente et le théorème de décomposition montrent que $\overline{\mathcal{G}}$ est pervers. Mieux, ils montrent que $\overline{\mathcal{G}}$ est l'extension intermédiaire de sa restriction à la strate ouverte $\mathfrak{g}^{rss}$. Par le théorème de changement de base propre, celle-ci est

$$R\bar{p}_{|\mathfrak{g}^{rss},*} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[n^2] = \bar{p}_{|\mathfrak{g}^{rss},*} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[n^2].$$

En particulier, les endomorphismes de $\overline{\mathcal{G}}$ sont les mêmes que ceux de $\bar{p}_{|\mathfrak{g}^{rss},*}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[n^2] \in \mathrm{Perv}(\mathfrak{g}^{rss})$.

Comme $\bar{p}_{|\mathfrak{g}^{rss}}$ est un revêtement étale galoisien de groupe S_n, ces endomorphismes sont $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[S_n]$. ■

De nouveau par le théorème de changement de base propre, si i désigne l'inclusion $i : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, on a : $\mathcal{G} = i^* \overline{\mathcal{G}} [-n]$. On a donc en particulier un morphisme

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell [S_n] = \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathfrak{g})} (\overline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(\mathcal{N})} (\mathcal{G}) .$$

<u>Th</u> : Ce morphisme est un isomorphisme.

Comme la catégorie des faisceaux pervers G-équivariants sur $\mathcal{N}$ est semi-simple, on en déduit, comme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell [S_n] = \bigoplus_{\substack{\sigma \\ \text{rep irréd} \\ \text{de } S_n}} \sigma \otimes \underbrace{V_\sigma}_{\text{multiplicité}}$, que :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\substack{\sigma \text{ rep} \\ \text{irréd} \\ \text{de } S_n}} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{objet simple} \\ \text{de } \mathrm{Perv}_G(\mathcal{N}) \end{pmatrix}}_{\text{deux à deux distincts}} \otimes \sigma \qquad (**)$$

En comparant les formules (*) et (**), on en déduit que l'on a fabriqué une injection :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{reps irréductibles} \\ \text{de } S_n \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{classes de} \\ \text{conjugaison nilpotentes} \\ \text{de } \mathfrak{g} \end{array} \right\}$$

$$\sigma \longmapsto c_\sigma$$

qui est en fait une bijection (par exemple car les deux ensembles ont même cardinaux).

De plus, on sait comment aller dans l'autre sens : soit c classe de conjugaison nilpotente : si l'on restreint $\mathcal{S}$ à c, on tue tous les $IC(\overline{c'}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ avec $\overline{c'} \not\supset c$. Puis si l'on prend la cohomologie en degré $-\dim(c)$, on tue tous les $c' \neq c$. Si σ est telle que $c_\sigma = c$, on a donc $\forall x \in c$:

$$H^{-\dim(c)}\left(\mathcal{S}_x\right) = \sigma,$$

i.e la représentation de S_n associée à c est

$$H^{2\dim(\mathcal{B}_x)}\left(\mathcal{B}_x, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right),$$

où $\mathcal{B}_x$ est la variété des Borels contenant x.

<u>Exo</u> : tout écrire explicitement dans le cas (pas très passionnant) de Sl_2 présenté ci-dessus.

<u>Rq</u> : L'argument ci-dessus décrit la cohomologie

les fibres de Springer en degré maximal. En fait, on pourrait montrer que :

$$H^*(\mathcal{B}_x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}(\mathbb{1}) \otimes \text{signe},$$

si $x \in$ classe de conjugaison déterminée par la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et si $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_n} \subseteq S_n$.