Cours 9

Théorie de Springer globale et fonctions de Whittaker

Références :

- Fulton-Harris, Representation Theory : A First Course, § 9, § 15, Springer.
- Laumon, Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, § 3, Duke Math. J.

Rappelons le théorème de Shintani énoncé dans le cours 4. Les notations sont celles de d'habitude.

<u>Th</u> (Shintani) Pour tout $x \in |X|$, pour toute classe de conjugaison semi-simple γ dans $GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, il existe une fonction explicite $W_{\gamma,x} : GL_n(F_x) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ telle que :

- $W_{\gamma,x}$ est inv. à droite par $GL_n(\mathcal{O}_x)$.
- $W_{\gamma,x}(1) = 1$
- $\forall n \in N_n(F_x)$, $\forall g \in GL_n(F_x)$, $W_{\gamma,x}(ng) = \psi_x(n)\, W_{\gamma,x}(g)$
- $\forall i = 1, \dots, n$,

$$T_x^i(W_{\gamma,x}) = q_x^{-\frac{i(i-1)}{2}}\, \mathrm{tr}(\Lambda^i \gamma)\, W_{\gamma,x}.$$

$$\left(:= \int_{GL_n(\mathcal{O}_x) \begin{pmatrix} \underbrace{\pi \cdots \pi}_{i\text{-fois}} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots\, 1 \end{pmatrix} GL_n(\mathcal{O}_x)} W_{\gamma,x}(-h)\, dh \right)$$

De plus, cette fonction est uniquement caractérisée par ces propriétés.

Shintani donne en fait une formule explicite pour $W_{\gamma,x}$. Pour l'énoncer, il nous faut commencer par un bref rappel.

<u>Représentations algébriques de GL_m</u> :

Soit $n \geq 1$, GL_m vu comme groupe algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Une représentation (algébrique) de GL_n est un morphisme $GL_m \to GL_{m'}$ de groupes algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. La catégorie de ces représentations est semi-simple, donc la comprendre revient à comprendre ses objets simples, i.e. les représentations algébriques irréductibles de GL_m.

Cons<u>truction</u> (Schur, Weyl)

Soit V la représentation standard de GL_m.
Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0)$ est une partition de d, on pose

$$S_\lambda(V) = \left(V^{\otimes d} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} \chi^\lambda\right)^{S_d}$$

avec χ^λ la représentation irréductible de S_d correspondant à λ.

On a une décomposition :

$$V^{\otimes d} \simeq \bigoplus_{\lambda} \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \chi^\lambda,$$

comme $GL_m \times S_d$-représentation.

<u>Ex</u> : $\mathbb{S}_{(d,0,\dots,0)}(V) = \mathrm{Sym}^d V$, $(\chi^{(d,0,\dots,0)} = 1)$, $\mathbb{S}_{(1,\dots,1)}(V) = \Lambda^d V$. $(\chi^{(1,\dots,1)} = \mathrm{sgn})$

Pour $d=2$, ce sont les deux seuls cas possibles et on retrouve $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$.

<u>Rq.</u> Pour $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0)$ partition de d comme ci-dessus notons $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_m} \subseteq S_d$. On peut décomposer

$$\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_d} \mathbb{1} = \bigoplus_{\lambda' \geq \lambda} K_{\lambda',\lambda}\, \chi^{\lambda'}$$

avec $\lambda' \geq \lambda \Leftrightarrow (\lambda'_1 \geq \lambda_1,\ \lambda'_1 + \lambda'_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2, \dots)$, $K_{\lambda',\lambda} \in \mathbb{N}$. $(K_{\lambda,\lambda} = 1)$

Comme

$$\bigotimes_{i=1}^m S^{\lambda_i} V = \left(V^{\otimes d}{}_{|S_\lambda}\right)^{S_\lambda} = \left(V^{\otimes d} \otimes \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_d} \mathbb{1}\right)^{S_d}$$

on obtient :

$$\bigotimes_{i=1}^m S^{\lambda_i} V = \bigotimes_{\lambda' \geq \lambda} \mathbb{S}_{\lambda'}(V)^{K_{\lambda',\lambda}}. \qquad (*)$$

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0)$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{S}_{(\lambda_1+k, \ldots, \lambda_m+k)}(V) \simeq \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes (\Lambda^m V)^{\otimes k},$$

donc on peut utiliser cette formule pour définir

$$\mathbb{S}_\lambda(V)$$

pour tout $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m)$.

Th : Les représentations $\mathbb{S}_\lambda(V)$ de GL_m sont irréductibles et toute représentation irréductible de GL_m est de la forme $\mathbb{S}_\lambda(V)$ pour un unique $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m)$.

Alors Shintani montre :

$\forall x \in |X|$, $\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

(on a pris $m = n$ ici)

$$W_{\gamma, x}(\mathrm{diag}(\pi_x^{\lambda_1}, \ldots, \pi_x^{\lambda_n})) = q_x^{\sum (i-1)\lambda_i} \, \mathrm{tr}(\gamma, \mathbb{S}_\lambda(V))$$

si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et

$$W_{\gamma, x}(\mathrm{diag}(\pi_x^{\lambda_1}, \ldots, \pi_x^{\lambda_n})) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Ces formules déterminent entièrement la fonction

$W_{\gamma, x} \in C^\infty(GL_n(\mathbb{A}_F))^{(N(\mathbb{A}_F), \psi)}$: en effet, $\forall x \in |X|$,

$$GL_n(F_x) = \bigsqcup_{(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)} N_n(F_x)\, \mathrm{diag}(\pi_x^{\lambda_1}, \dots, \pi_x^{\lambda_n})\, GL_n(\mathcal{O}_x).$$

(Iwasawa)

Le but de ce cours est d'expliquer une géométrisation (partielle), due à Laumon, de

$$W_\sigma = \prod_{x \in |X|} W_{\sigma(\mathrm{Frob}_x), x}$$

pour $\sigma : \mathrm{Gal}_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ non ramifiée partout (mais pas nécessairement irréductible).

On a vu ci-dessus que la description explicite des fonctions de Whittaker fait intervenir les représentations (algébriques) irréductibles de GL_n ; de plus, celles-ci sont fabriquées, cf. plus haut, par dualité de Schur-Weyl à partir des représentations des groupes symétriques.

Heuristique : Soit $\mathbb{L}$ système local sur $X \hookrightarrow \sigma$.

On a mentionné au cours précédent que

$$H^*\left(\begin{matrix}\text{fibre de} \\ \text{Springer pour } \lambda\end{matrix}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right) = \operatorname{ind}_{S_\lambda}^{S_m}(\mathbb{1}) \otimes (\text{signe}).$$

partition de m

À cause de la relation (*), il est donc tentant de regarder, pour $x \in |X|$,

$$\left(H^*\left(\begin{matrix}\text{fibre de} \\ \text{Springer pr } \lambda\end{matrix}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right) \otimes \mathbb{L}_x^{\otimes m} \right)^{S_m}.$$

En effet, la trace de Frobenius sur la cohomo-logie en degré maximal sera donnée

$$\operatorname{tr}\left(\mathrm{Frob}_x, \left(\chi^\lambda \otimes \mathbb{L}_x^{\otimes m}\right)^{S_m}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{Frob}_x, \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{L}_x)\right),$$

comme dans la formule de Shalika.

Rappelons que nous avons introduit au cours 6 le champ algébrique Coh_X des faisceaux cohérents sur X, plats sur la base. On notera, pour $m \geq 0$,

$$Coh^m_{X,0} \subseteq Coh_X$$

le sous-champ des faisceaux cohérents de rang générique 0 (i.e. de torsion) et de degré m.

Ce champ a une stratification indexée par les partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0)$ de m : pour un tel λ, notons $d_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $\forall i$ ($d_{m+1} = 0$) et considérons :

$$i_\lambda : X^{(d_1)} \times_k X^{(d_2)} \times_k \cdots \times_k X^{(d_m)} \longrightarrow Coh^m_{X,0}$$

$$(D_1, \dots, D_m) \longmapsto \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X\left(\sum_{j=i}^m D_j\right).$$

(convention : $X^{(0)} = \emptyset$)

Rq : Supposons $X = \mathbb{A}^1_k$ (pas projective, mais ce n'est pas grave). Alors :

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{faisceaux cohérents de} \\ \text{torsion de degré } m \\ \text{sur } \mathbb{A}^1_k \end{array} \right\rangle \simeq \left\langle \begin{array}{c} (V, \xi),\ V\ k\text{-ev} \\ \text{de dim } m,\ \xi \\ \text{endomorphisme de } V \end{array} \right\rangle$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \left(H^0(\mathbb{A}^1_k, \mathcal{F}),\ \begin{array}{l} \xi = \text{action de} \\ \text{la coordonnée } T \end{array} \right)$$

Donc $\mathrm{Coh}^m_{\mathbb{A}^1_k,0} \simeq [\mathfrak{g}_m / GL_m]$

avec $\mathfrak{g}_m = \mathrm{Lie}(GL_m)$ et action adjointe.

(choix d'une trivialisation $V \simeq k^m$)

Stratification : si $\xi \in \mathfrak{g}_m$ a pour facteurs invariants $P_1, \dots, P_m$ avec $\forall i$, $P_{i+1} | P_i$, $\deg P_i = \lambda_i$, alors la classe de conjugaison de ξ est contenue dans l'image de i_λ.

Retour au cas général. Notons $\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}$ le foncteur

$$S \mapsto (\mathcal{F}_m \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{m-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0 = 0)$$

avec $\forall i$, $\mathcal{F}_i \in \mathrm{Coh}^i_{X,0}(S)$. $\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}$ est un champ algébrique et on a des morphismes :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"] & X^m \\ \mathrm{Coh}^m_{X,0} & \end{tikzcd}$$

dim relative - m

représentable projectif

avec $\pi(\mathcal{F}_m \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{m-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow 0) = \mathcal{F}_m$

et $\rho(\cdots) = \Big(\text{support de } \ker(\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i-1})\Big)_{i=1,\dots,m}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_i \\ \widehat{\mathrm{Coh}}_{X,0}(S) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Rq : De nouveau, on peut considérer le cas particulier $X = \mathbb{A}^1_k$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{\mathbb{A}^1_k,0} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^m_k \\ \mathrm{Coh}^m_{\mathbb{A}^1_k,0} \end{tikzcd}$$

peut se réécrire explicitement comme suit :

$$\begin{tikzcd} {[\widetilde{\mathfrak{g}}_m / GL_m]} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"] & \mathfrak{t}_m = \mathrm{Lie}(\text{tore diagonal dans } GL_m) \\ {[\mathfrak{g}_m / GL_m]} \end{tikzcd}$$

π étant la résolution de Grothendieck-Springer du cours 8 (qui est GL_m-équivariante, donc passe au quotient) et

$$\rho : [\widetilde{\mathfrak{g}}_m/GL_m] = \left\{ (\xi, gB_m),\ \begin{matrix}\xi \in \mathfrak{g}_m \\ g \in GL_m\end{matrix},\ g^{-1}\xi g \in B_m \right\} \longrightarrow \mathfrak{t}_m$$

$$(\xi, gB_m) \longmapsto g^{-1}\xi g \text{ modulo } N_m \ (= \text{unipotent})$$

La vérification de cette affirmation est une conséquence immédiate des définitions.

Si l'on prend la fibre au-dessus de $0 \in \mathbb{A}^m_k$, on retrouve la résolution de Springer pour le cône nilpotent de GL_m.

Ainsi, comme une courbe lisse X sur k est localement pour la topologie étale isomorphe à $\mathbb{A}^1_k$, on peut penser à $\pi : \widetilde{Coh}^m_{X,0} \to Coh^m_{X,0}$ comme à une "globalisation" de la résolution de Springer (la résolution de Grothendieck-Springer étant elle-même la globalisation correspondant à $X = \mathbb{A}^1_k$).

Soit $\mathbb{L}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang n sur X correspondant à $\sigma : Gal_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ non ramifiée.

<u>Prop</u> : Le complexe $R\pi_* e^* \mathbb{L}^{\boxtimes m} \in D^b_c(Coh^m_{X,0}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est un faisceau pervers, qui est l'extension intermédiaire de sa restriction à la strate ouverte, image de $i_{(m,0,\dots,0)} : X^{(m)} \to \widetilde{Coh}^m_{X,0}$.

Dém : Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0)$ une partition de m. Soit $(D_1, \dots, D_m) \in X^{(d_1)} \times \dots \times X^{(d_m)}$, avec $\forall i \; d_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Considérons la fibre

$$\pi^{-1}(i_\lambda(D_1, \dots, D_m)).$$

Si l'on écrit pour chaque $i = 1, \dots, m$, $D_i = \sum_{x \in |X|} d_{i,x}[x]$ (avec les $d_{i,x}$ presque tous nuls), à i et x fixés, $d_{i,x}[x]$ "contribue" i-fois dans $i_\lambda(D_1, \dots, D_m)$.
L'espace des filtrations de $\mathcal{O}_{X,x}^i / x^{d_{i,x}}$ avec gradués successifs de degré 1 est de dimension $d_{i,x} \frac{i(i-1)}{2}$ (car $\frac{i(i-1)}{2} = (i-1) + (i-2) + \dots + 1$). En sommant les contribution sur x et i, on obtient :

$$\dim \pi^{-1}(i_\lambda(D_1, \dots, D_m)) = \sum_{x \in |X|} \sum_{i=1}^{m} d_{i,x} \frac{i(i-1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{i(i-1)}{2} \sum_x d_{i,x} = \sum_{i=1}^{m} d_i \frac{i(i-1)}{2}. \quad (*)$$

D'un autre côté, on peut aussi estimer la codimension de $i_\lambda(X^{(d_1)} \times \dots \times X^{(d_m)})$ dans $\mathrm{Coh}^m_{X,0}$:

le champ $\mathcal{C}oh^m_{X,0}$ a pour dimension 0 tandis que $i_\lambda(X^{(d_1)}\times\cdots\times X^{(d_m)})$ a pour dimension :

$$\underbrace{\dim(X^{(d_1)}\times\cdots\times X^{(d_m)})}_{=\sum_{i=1}^m d_i} - \underbrace{\dim\left(\underline{\mathrm{Aut}}\left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X\left(\sum_{j=i}^m D_i\right)\right)\right)}_{=\sum_{i=1}^m d_i i^2}$$

$$= \sum_{i=1}^m d_i(1-i^2)$$

Donc

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{C}oh^m_{X,0}} i_\lambda(X^{(d_1)}\times\cdots\times X^{(d_m)}) = \sum_{i=1}^m d_i(i^2-1). \quad (**)$$

En comparant $(*)$ et $(**)$, on voit que :

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{C}oh^m_{X,0}} i_\lambda(X^{(d_1)}\times\cdots\times X^{(d_m)}) \geq 2\dim \pi^{-1}(i_\lambda(D_1,\dots,D_m))$$
$$\forall (D_1,\dots,D_m)\in X^{(d_1)}\times\cdots\times X^{(d_m)}.$$

Par conséquent le morphisme π est semi-petit et la seule strate pour laquelle on a égalité est la strate ouverte $i_{(m,0,\dots,0)}(X^{(m)})$.

Le champ algébrique $\widetilde{\mathcal{C}oh}^m_{X,0}$ est lisse de dimension 0. On peut donc appliquer le théorème de décomposi-

-tion (version chapitre...) pour voir que $R\pi_* \rho^* \mathbb{L}^{\boxtimes m}$ est pervers, extension intermédiaire de sa restriction à la strate ouverte. ■

Le produit fibré $\widetilde{Coh}^m_{X,0} \times_{Coh^m_{X,0},\, i_{(m,\dots,0)}} X^{(m)}$ n'est autre que X^m et le changement de base de π le morphisme $r : X^m \to X^{(m)}$ quotient.
Par conséquent, la restriction de $R\pi_* \rho^* \mathbb{L}^{\boxtimes m}$ à la strate ouverte n'est autre, par changement de base propre, que $r_* \mathbb{L}^{\boxtimes m}$. Comme r est S_m-équi-variant, ce faisceau porte une action de S_m. On en déduit que son extension intermédiaire aussi, et donc on peut poser :

$$\mathcal{L}_{\mathbb{L}} = \left(R\pi_* \rho^* \mathbb{L}^{\boxtimes m}\right)^{S_m} \in \mathrm{Perv}\left(Coh^m_{X,0}\right).$$

<u>Rq</u> : Si $X = \mathbb{A}^1$, on retrouve la construction d'une action de S_m sur le faisceau de Grothendieck-Springer.

Cette construction géométrise (partiellement) la construction de Shalika. Pour voir pourquoi, nous pouvons revenir aux considérations du début de ce cours et essayer de calculer la fonction trace de Frobenius de $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}$.

Par le dictionnaire faisceaux-fonctions, on voit qu'il s'agit essentiellement de décrire la fibre de π en $i_\lambda(D_1,\dots,D_m)$, pour une partition λ de m et $(D_1,\dots,D_m) \in X^{(d_1)}\times\dots\times X^{(d_m)}$.

En restriction à cette fibre, ρ a pour image l'ensemble des $(x_1,\dots,x_m)$ tels que $\sum x_i = \sum i D_i$, ensemble qui est en bijection avec

$$S_m \Big/ \prod_{x\in|X|} S_{m_x} \quad \text{où } m_x = \sum_i i\, d_{i,x}$$

$$\text{si } D_i = \sum_x d_{i,x}[x].$$

Soit $(x_1,\dots,x_m)$ satisfaisant cette condition. Alors $\rho^{-1}(x_1,\dots,x_m)$ est en bijection avec

$$\prod_{x\in|X|} \left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^{m_x}_{x,0}\right)_{(d_{1,x}[x],\dots,d_{m,x}[x])}$$

fibre

On en déduit que

$$H^\bullet\left(\left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}\right)_{(D_1,\dots,D_m)},\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\simeq \mathrm{Ind}^{S_m}_{\prod_{x\in|X|}S_{m_x}}\left(\boxtimes_x H^\bullet\left(\left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}\right)_{(d_{1,x}[x],\dots,d_{m,x}[x])},\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\right)$$

comme représentation de S_m,

et que, par le théorème de changement de base propre,

$$H^\bullet\left(\mathcal{L}_{\mathbb{L},(D_1,\dots,D_m)}\right)\simeq \bigotimes_{x\in|X|}\left(\sigma_x^{\otimes m_x}\otimes H^\bullet\left(\left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}\right)_{(d_{1,x}[x],\dots,d_{m,x}[x])},\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\right)^{S_{m_x}}$$

Donc le calcul de la cohomologie des fibres se ramène au cas $(D_1,\dots,D_m)=(d_1[x],\dots,d_m[x])$, $x\in X(\bar{k})$. Ce problème est local pour la topologie étale sur X, donc on peut supposer $X=\mathbb{A}^1_k$ et $x=0$. Dans ce cas, on a vu plus haut que $\left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{\mathbb{A}^1_k,0}\right)_{(d_1[0],\dots,d_m[0])}$ est la fibre de Springer correspondant à la partition λ. Donc, comme déjà mentionné plus haut,

$$H^\bullet\left(\left(\widetilde{\mathrm{Coh}}^m_{X,0}\right)_{(d_1[x],\dots,d_m[x])}\right)=\mathrm{Ind}^{S_m}_{S_\lambda}\mathbb{1}\otimes\text{signe}$$

comme représentation de S_m, et donc

par (*) déjà cité, on a :

$$H^\bullet\left(\mathcal{L}_{\mathbb{L},(d_1[x],\dots,d_m[x])}\right) \simeq \bigotimes_{i=1}^{m} S^{\lambda_i}(\sigma_x \otimes \text{signe})$$

$$\simeq \bigotimes_{\lambda' \geq \lambda} \mathbb{S}_{\lambda'}(\sigma_x)^{\widetilde{K}_{\lambda\lambda'}} .$$

(modification des $K_{\lambda',\lambda}\dots$)

comme représentation de $\mathrm{Gal}_{k(x)}$.

(ici $\mathbb{S}_{\lambda'}(\sigma_x)$ désigne la représentation

$$\mathrm{Gal}_{k(x)} \to \mathrm{Gal}_F \xrightarrow{\sigma} GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{\mathbb{S}_{\lambda'}} GL(V_{\mathbb{S}_{\lambda'}}))$$

Comme $\widetilde{K}_{\lambda,\lambda} = 1$, on déduit de ces considérations que pour tout entier $m \geq 0$, toute partition λ de m, la trace de Frobenius sur la fibre en $(D_1,\dots,D_m) \in X_x^{(d_1)} \times \dots \times X^{(d_m)}$ du $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau de cohomologie en degré maximal $\Sigma\, d_i(i-1)$ de $i_\lambda^* \mathcal{L}_{\mathbb{L}}$ est

$$\bigotimes_{x \in |X|} \mathbb{S}^{\lambda_x}(\mathbb{L}_x)\left(-\Sigma\, d_{i,x}\frac{i(i-1)}{2}\right)$$

avec $\lambda_x = (\lambda_{1,x},\dots,\lambda_{m,x})$. $\forall x$.

$\rightsquigarrow$ la trace de Frobenius est donc donnée en ce degré par W_σ.

Pour <u>aller plus loin</u> : En fait, le faisceau pervers $\mathcal{L}_{\amalg}$ ne géométrise pas vraiment la fonction W_0, car, comme il est visible ci-dessus, la trace de Frobenius sur la cohomologie en degré maximal est la bonne, mais pas sur les degrés plus petits. La meilleure façon de comprendre ce problème (qui n'en est pas vraiment un) est de décrire la construction de $\mathcal{L}_{\amalg}$ en termes de la <u>Grassmannienne affine</u> et de l'<u>équivalence de Satake géométrique</u> (Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen). L'équivalence de Satake géométrique, non discutée dans ce cours, est l'énoncé le plus important du programme de Langlands géométrique.

Voir :

Zhu, <u>An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence</u>, IAS/Park City Math. Series